SECUENCIA DIDACTICA PARA LA APROXIMACION AL CONCEPTO DE INTEGRAL EN ESTUDIANTES DE GRADO 11 DE LA INSTITUCION EDUCATIVA GILBERTO ALZATE AVENDAÑO

RESUMEN

El presente informe es para mostrar los resultados obtenidos luego de aplicar una secuencia didáctica con la finalidad de dar una aproximación al concepto de la integral. La secuencia fue implementada en el grado 11, conformada por 81 estudiantes en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño. La presente investigación es aplicada con metodología de investigación acción participación y con enfoque cualitativo por observación directa.

PALABRAS CLAVE: Secuencia didáctica, Integral, Investigación acción participativa, área bajo la curva y método de exhaucion**.**

PRESENTACION

En los últimos años Colombia ha participado de diferentes pruebas a nivel internacional que determinan el nivel de calidad en la educación, entre estas se encuentran las pruebas *PISA (Program for International Student Assessment*), las TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*)[1] y las PIRLS (*Progress in International Reading Literacy Study*)[2] donde desafortunadamente los resultados no han sido muy buenos, dejando grandes interrogantes sobre los intereses de los estudiantes y las grandes problemáticas que se están presentando en la educación.

Las pruebas PISA les prestan especial atención a las matemáticas, por considerar que se trata de una materia que ayuda a predecir el futuro éxito de los alumnos

---

[1] http://www.icfes.gov.co/investigacion/component/docman/doc_view/15-informe-resultados-de-colombia-en-timss-2007-resumen-ejecutivo?Itemid

[2] http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/w3-article-318377.html

después de la educación secundaria. Pero ese fue el peor escenario para Colombia. Latino América se encuentra entre los últimos puestos; Chile (lugar 51 con 423 puntos), México (lugar 53 con 413 puntos), Uruguay (puesto 55 con 409 puntos) y Argentina (lugar 59 con 388 puntos). Colombia se ubica en el lugar 62, con 376 puntos, y Perú en el último sitio de la lista, el número 65, con 368 puntos.

En el caso de la prueba ICFES o prueba saber 11 se han obtenido muy bajos resultados en las áreas de matemáticas y física teniendo un tendencia nacional de 48,71 y 48,93 puntos respectivamente[3]. A nivel departamental se obtuvo una tendencia de 50,34 en el área de Matemáticas y de 50,0 en el área de Física siendo estos resultados poco favorables, aunque de acuerdo a los puntajes del año anterior aumentaron. En cambio en el ámbito local que es Villavicencio se obtuvo una media de 51,15 en matemáticas y 50,56 en física, sin embargo la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño obtuvo porcentajes por encima de la media tanto en matemáticas como en física los porcentajes fueron 51,77 y 51,26 respectivamente.

Es importante desarrollar en el estudiante habilidades para razonar, modelar, capacidades en resolución de problemas, todo esto enfocado en el pensamiento variacional en el que se encuentran las integrales, además diseñar estrategias ubicando a los estudiantes en un contexto ya sea en matemáticas, en otras ciencias o mejor aún en la vida diaria.

Desarrollar el pensamiento variacional en el nivel de básica y media, implica incorporar conceptos y procedimientos que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones tanto de la actividad práctica del hombre como de las ciencias (Lineamientos Curriculares).

Este trabajo se lleva a cabo para tener un mayor conocimiento sobre las estrategias pedagógicas para enseñar integrales en estudiantes del grado 11, debido a que se quiere capturar la atención de cada uno de los estudiantes y este es el principal

---

[3]http://www.icfes.gov.co/index.php/instituciones-educativas/saber-11/resultados-agregados-saber-11/resultados-agregados-2015-2

propósito de las estrategias innovadoras para brindarle al estudiante una mayor aproximación al concepto de integral que faciliten a los alumnos a que desarrollen su comprensión y desarrollo del pensamiento de la matemática por medio del aprendizaje significativo.

De acuerdo a estas problemáticas se formula la pregunta de investigación: ¿Qué estrategias pedagógicas favorecerán el desarrollo del pensamiento variacional y particularmente la comprensión del concepto de integral en estudiantes del grado 11 en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño? Para el desarrollo de esta propuesta se estableció una metodología que consta de cinco fases, la primera es la Revisión Teórica donde se fundamenta todos los referentes que sustentan el proyecto, la fase diagnostica para conocer el contexto de los estudiantes, la tercera fase es la de diseño para seleccionar las estrategias pedagógicas acorde con los resultados obtenidos en la fase diagnostica. En la cuarta fase se implementó las estrategias para que contribuyan en la comprensión y desarrollo del pensamiento de la matemática y por último se hacen los respectivos análisis.

El informe tiene la siguiente estructura, inicialmente un marco referencial, seguidamente se establece la metodología, posterior mente se muestran los resultados, análisis, conclusiones, recomendaciones y por último se presenta la bibliografía y algunos anexos.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1. Marco Legal

2.1.1 Ley 115[4]

La presente Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de la Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de

[4] http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público.

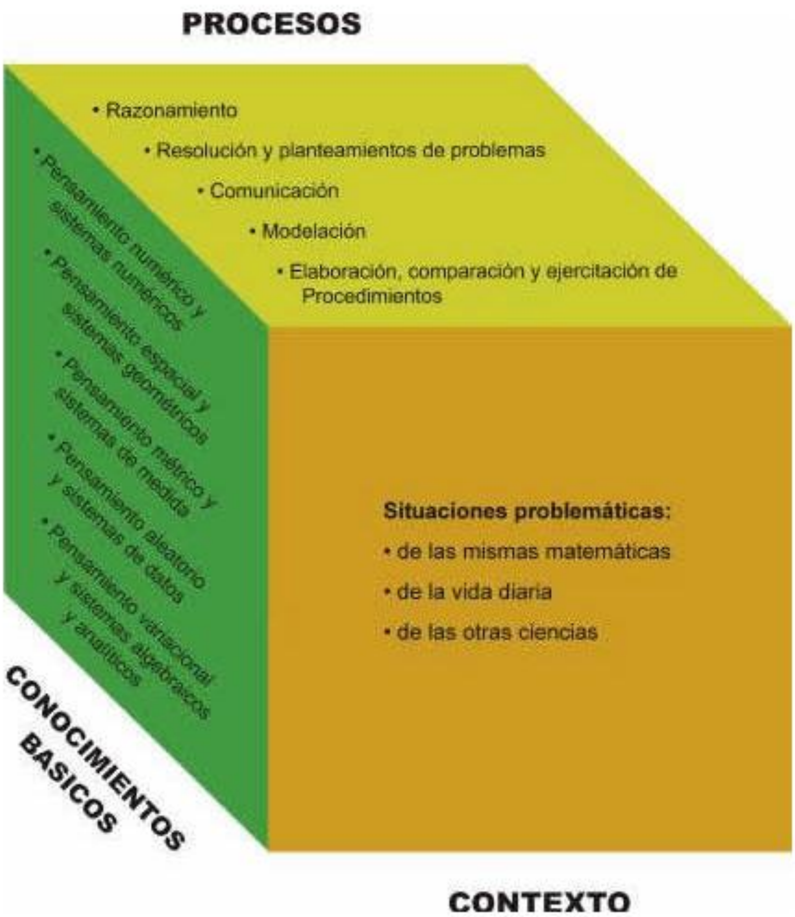
De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal en sus niveles preescolar, básica (primaria y secundaria) y media, no formal e informal, dirigida a niños y jóvenes en edad escolar, a adultos, a campesinos, a grupos étnicos, a personas con limitaciones físicas, sensoriales y psíquicas, con capacidades excepcionales, y a personas que requieran rehabilitación social.

2.1.2 Derecho a la Educación

Artículo 67. La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura. La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente. El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica. La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos. Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del servicio y asegurar a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo. La Nación y las entidades territoriales participarán en la dirección, financiación y administración de los servicios educativos estatales, en los términos que señalen la Constitución y la ley[5].

2.1.3 Lineamientos curriculares

Este documento se presenta a consideración de los docentes de los niveles de la educación básica y media que orientan y desarrollan el área de matemáticas en el país. Pretende ser posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que viven las instituciones. No debe asumirse como un texto acabado que agota todos los posibles referentes para elaborar o desarrollar un currículo, sino más bien como una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación que ha de suscitar análisis, discusiones y proyecciones en torno al mejoramiento de la calidad de la educación matemática.



[5] Constitución Política de Colombia. Artículo 67. Derecho a la Educación.

2.2 Marco Didáctico

2.2.1 Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

En esta forma se amplía la visión de la variación, por cuanto su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

2.2.2 La resolución y el planteamiento de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático.

En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Pero esto no significa que se constituya en un tópico aparte del currículo, deber á permearlo en su totalidad y proveer un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Las investigaciones que han reconocido la resolución de problemas como una actividad muy importante para aprender matemáticas, proponen considerar en el currículo escolar de matemáticas aspectos como los siguientes:

- Formulación de problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas.
- Desarrollo y aplicación de diversas estrategias para resolver problemas.
- Verificación e interpretación de resultados a la luz del problema original.
- Generalización de soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- Adquisición de confianza en el uso significativo de las matemáticas (NCTM, 1989: 71).

2.2.3 El razonamiento

Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos.

De manera general, entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los niveles informales del razonamiento en los conjuntos de grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento, en los conjuntos de grados superiores.

Además, conviene enfatizar que el razonamiento matemático debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas.

Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

2.2.4 La comunicación

Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos. Los retos que nos plantea el siglo XXI requieren que en todas las profesiones científicas y técnicas las personas sean capaces de:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

2.2.5 La modelación

La sociedad ha experimentado en los últimos tiempos un cambio de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información; dicho cambio implica una transformación de las matemáticas que se enseñan en la escuela, si se pretende que los estudiantes de hoy sean ciudadanos realizados y productivos en el siglo que viene.

Actualmente, con la aparición de la era informática, uno de los énfasis que se hace es la búsqueda y construcción de modelos matemáticos. La tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta.

2.2.6 La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Además de que el estudiante razone y se comunique matemáticamente, y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, se espera también que haga cálculos correctamente, que siga instrucciones, que utilice de manera correcta una calculadora para efectuar operaciones, que transforme expresiones algebraicas desde una forma hasta otra, que mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc.; es decir que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. El aprendizaje de procedimientos o "modos de saber hacer" es muy importante en el currículo ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

2.2.7 Unidad didáctica

MODELO PARA EL DISEÑO DE UNIDADES DIDÁCTICAS[6]

OBJETIVOS	PROCEDIMIENTOS
1. ANÁLISIS CIENTÍFICO	
• La reflexión y actualización científica del profesor • La estructuración de los contenidos	• Seleccionar los contenidos • Definir el esquema conceptual • Delimitar procedimientos científicos

[6] Diseño de unidades didácticas en el área de ciencias experimentales

	• Delimitar actitudes científicas
2. ANÁLISIS DIDÁCTICO	
• La delimitación de los condicionamientos del proceso de enseñanza - aprendizaje: adecuación al alumno	• Averiguar las ideas previas de los alumnos • Considerar las exigencias cognitivas de los contenidos • Delimitar implicaciones para la enseñanza
3. SELECCIÓN DE OBJETIVOS	
• La reflexión sobre los potenciales aprendizaje de los alumnos • El establecimiento de referencias para el proceso de evaluación	• Considerar conjuntamente el análisis conceptual y el análisis didáctico • Delimitar prioridades y jerarquizarlas
4. SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS	
• La determinación de las estrategias a seguir para el desarrollo del tema • La definición de tareas a realizar por profesor y alumnos	• Considerar los planteamientos metodológicos para la enseñanza • Diseñar la secuencia global de enseñanza • Seleccionar actividades de enseñanza • Elaborar materiales de aprendizaje
5. SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN	
• La valoración de la unidad diseñada • La valoración del proceso de enseñanza y de los	• Delimitar el contenido de la evaluación • Determinar actividades y momentos del desarrollo del

aprendizajes de los alumnos	tema • Diseñar instrumentos para la recogida de información

2.2.8 Investigación acción

McNiff (1991 ; pág. 1) “Se trata de una forma de reflexión que se interesa por una mejora en el desarrollo del currículo en la escuela básica, anima a los profesores a ser reflexivos en su práctica con objeto de mejorar la calidad de la educación. Se trata de una forma de indagación introspectiva colectiva”

Los cuatro aspectos fundamentales de la Investigación Acción son planificación, acción, observación y reflexión.

El plan ha de ser flexible para poder adaptarse a efectos imprevistos, además debe mirar hacia adelante. La acción está guiada por la planificación. La observación documenta los efectos de la acción, la observación debe planificarse de tal modo que se proporcione una base documental para la reflexión posterior. La reflexión ha de dar sentido a los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción.

El investigador debe de formular juicios de hechos no juicios de valor.

Los rasgos que definen nuestra investigación son, resumidamente, los siguientes: es una investigación en clase, es una forma de indagación introspectiva, es una reflexión para mejorar el currículo, no establecemos diferencias entre la práctica sobre la que investigamos y el proceso de nuestra investigación, se trata de un problema practico y no teórico, tratamos de interpretar lo que hacen los alumnos en un momento determinado, con un contenido determinado.

Las técnicas de recogida de datos utilizadas en estos casos han sido: observación directa y participante; cuaderno de campo; grabación en video de las distintas sesiones; protocolos para los trabajos que los alumnos realizan en clase.

Titone (1986) entiende por sistema de análisis en la enseñanza un conjunto de categorías que cumplan: en ellas se encarna una manera particular de ver la realidad de clase; exige que los eventos observados sean divididos en unidades de análisis; sirve para clasificar tales unidades; permite obtener una imagen fiel de uno o varios aspectos del complejo fenómeno de la enseñanza.

También indica que las categorías utilizadas en el análisis de la comunicación verbal deben de ser las siguientes: dar informaciones, impartir instrucción, hacer preguntas, aceptar o rechazar, dar respuestas, callar. Los procesos de interacción o momentos son; programar el trabajo escolar, crear las motivaciones, impartir informaciones, guiar las discusiones, intervenir a nivel disciplinar en problemas de orden psicológico o social y evaluar.

El sistema de categorías que hemos elaborado para esta investigación se conciben en tres subsistemas: categorías de interacción didáctica, categorías de contenido matemático y categorías de comprensión del contenido. Con las categorías de interacción didáctica se permite abordar una descripción empírica amplia del acontecer del aula a lo largo de todo el proceso de investigación y del trabajo coordinado entre investigador principal y profesor responsable en el aula. Con las categorías de contenido matemático se realiza la especificación del contenido matemático y se obtiene información sobre la concepción subyacente tanto del contenido como de la enseñanza de las matemáticas. Las categorías de comprensión del contenido se estiman distintos niveles de interrelación entre los conceptos, hechos, procedimientos y representaciones de cada uno de los aspectos contemplados en la categoría de contenido matemático.

Categorías de interacción didáctica, las consideran agrupadas en las cuatro fases del proceso de enseñanza – aprendizaje: presentación, implementación sistematización y socialización.

2.2.9 Comprensión de conceptos matemáticos

La comprensión de los conceptos matemáticos ha sido una cuestión que ha llamado la atención tanto de profesores como de investigadores, pues se considera como una condición necesaria para el trabajo óptimo con la matemática escolar. Varios autores (Sierpinska 1992, Jungk 1977) coinciden que algunos elementos indicativos de la comprensión1 de los conceptos matemáticos pueden ser:

- Conocer y utilizar correctamente la simbología con que se le representa al concepto
- Interpretar correctamente los símbolos utilizados en la definición del concepto.
- Ser capaz de identificar ejemplos de su medio
- Conocer sus propiedades invariantes
- Reconocerlo en diversos contextos
- Poder darse cuenta de sus relaciones con otros conceptos
- Poder dar ejemplos y contraejemplos y fundamentar por qué estos pertenecen o no a la extensión del concepto.
- Utilizar definiciones equivalentes
- Aplicarlo en la resolución de problemas

Lograr la comprensión de los conceptos básicos del cálculo no es una tarea fácil. Pues se ha reconocido que existen tanto dificultades intrínsecas al conocimiento mismo (los obstáculos epistemológicos) como aquéllos que le son *exteriores* al conocimiento (como el método de enseñanza, el enfoque, la influencia de los textos, etc.), que también pueden obstaculizar o incluso dejar de lado la comprensión de los conceptos.

2.3Marco Conceptual

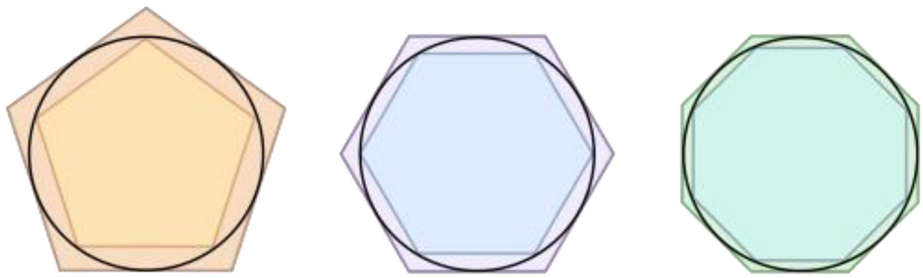
2.3.1 Historia del cálculo de áreas

Las culturas babilonias y egipcias son ya precursoras de una incipiente geometría muy aritmetizada. En ambas culturas (los babilonios, parece ser, fueron mejores algebristas que los egipcios y peores geómetras) se relacionaba el área de una figura plana con su perímetro. Se conocían métodos correctos para obtener áreas de triángulos y rectángulos, y buenas aproximaciones a partir de la comparación con el cuadrado del pentágono, hexágono (2200a.C). Probablemente se tiene una idea intuitiva de que el área de una figura geométrica es la medida que proporciona el tamaño de la región encerrada por dicha figura. El área de un polígono puede definirse como la suma de las áreas de los triángulos en que puede ser descompuesto y se puede demostrar que el área obtenida es independiente de cómo se descompuso el polígono en triángulos.

El paso siguiente de obtener áreas de figuras planas limitadas por curvas específicas, tales como un arco parabólico, no se alcanzó aparentemente hasta los tiempos de Arquímedes (287-212 a.C.) Antes, Antifonte (430 a.C.) y Eudoxo (409-356 a.C.), como nos ha transmitido Euclides en sus Elementos, obtienen el área de un círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscritos

2.3.2 Método de Exhaución

Se suele citar a Arquímedes como el precursor del cálculo integral. En su libro SOBRE LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA, nos presenta el conocido Método de Exhaución (Agotamiento); de un modo sencillo puede describirse así: dada una región cuya área deseamos determinar, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada, y cuya área sea conocida o de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor, continuándose el proceso tomando cada vez polígonos de mayor número de lados y que tiendan a llenar la región dada inicialmente.

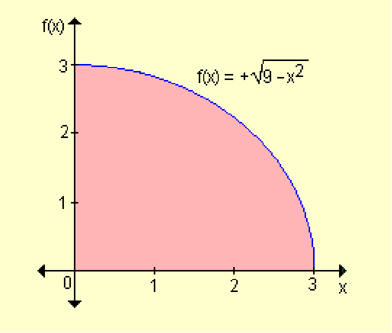


Hasta aquí tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región y que, calcular áreas de regiones con lados rectos resulta sencillo. Sin embargo no es fácil hallar el área de una región limitada por lados que son curvos.

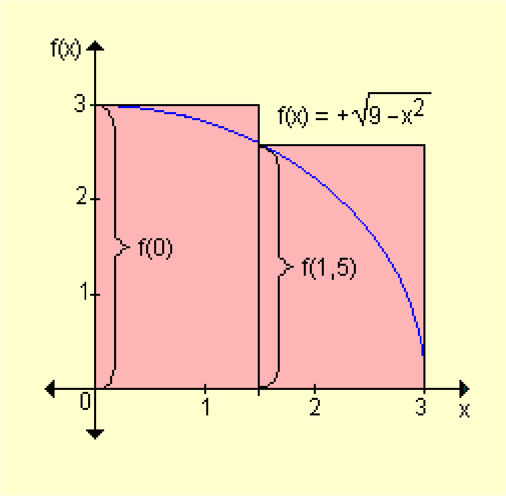
El desafío es encontrar el área bajo la gráfica de f(x) = + de x = 0 a x = 3.

Debemos encontrar el valor del área representada gráficamente. El desafío es encontrar el área bajo la gráfica de f(x) = $\sqrt{9-x^2}$ de x = 0 a x = 3.

Debemos encontrar el valor del área representada gráficamente.



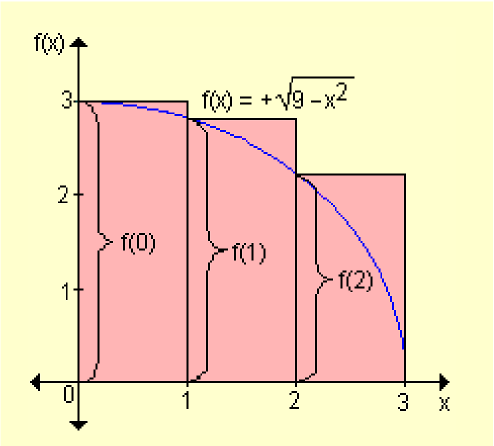
Si tenemos en cuenta la forma de trabajo usada por Arquímedes una aproximación de esta región se puede encontrar usando dos rectángulos. La altura del primer rectángulo es f(0) = 3 y la altura del segundo rectángulo es f(1,5) = $\sqrt{6{,}75}$. El ancho de cada rectángulo es 1,5



El área total de los dos rectángulos es:

A = 3* 1,5 + $\sqrt{6,75}$ * 1,5 ≈ 8,397114317 unidades cuadradas.

Como observamos en la gráfica esta aproximación es mayor que el área real. Para lograr una mejor aproximación podemos dividir el intervalo [0, 3] en tres partes iguales, cada uno de una unidad de ancho.



La altura del primer rectángulo es f(0), la del segundo es f(1) y la del tercero f(2). En todos los casos el ancho del subintervalo es 1 es decir, la medida de la base es 1 unidad.

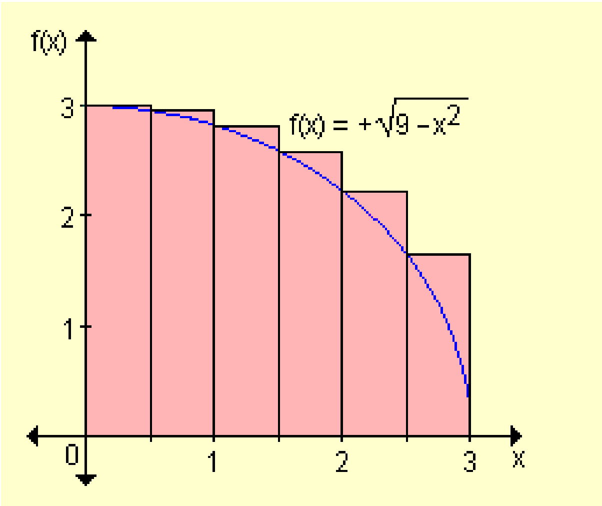
El área total de los tres rectángulos es:

Área = 1 * f(0) + 1 * f(1) + 1 * f(2) = 1 * 3 + 1 * $\sqrt{8}$ + 1 * $\sqrt{5}$

Área ≅8,064495102 unidades cuadradas.

Aquí podemos observar que esta aproximación se ve mejor que la anterior pero aún es mayor que el área real buscada.

Para mejorar la aproximación podemos dividir el intervalo en seis partes con anchos iguales, es decir considerar como medida de la base de cada rectángulo 0,5 unidades.



Rectángulo	X	f(x)	Ancho de la base	Área
1	0	3	0,5	1,5
2	0,5	$\sqrt{8,75}$	0,5	1,479019946
3	1	$\sqrt{8}$	0,5	1,414213562
4	1,5	$\sqrt{6,75}$	0,5	1,299038106
5	2	$\sqrt{5}$	0,5	1,118033989
6	2,5	$\sqrt{2,75}$	0,5	0,829156197
				Área total □ 7,63946180

De la misma forma analizamos el área total considerando rectángulos de medida de base 0,25 unidades.

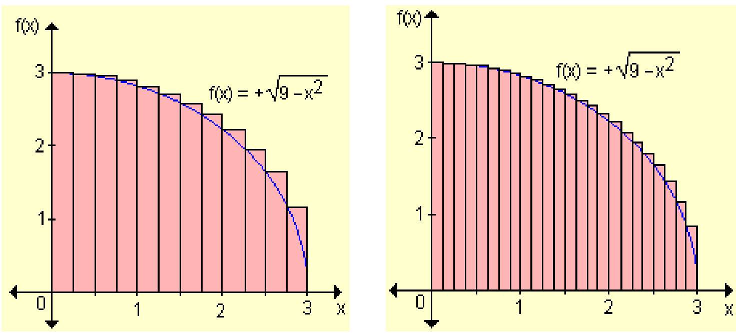
Este proceso de aproximar el área bajo una curva usando más y más rectángulos para obtener cada vez una mejor aproximación puede generalizarse. Para hacer esto podemos dividir el intervalo de x = 0 a x = 3 en n partes iguales. Cada uno de esos intervalos tiene ancho de medida $\frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ y la altura determinada por el valor de la función en el lado izquierdo del rectángulo es decir $f_i \left[\frac{3}{n}\,(i-1)\right]$donde i = 1, 2, 3,

....., n. Si utilizamos el ordenador podemos hacer los cálculos tomando cada vez más rectángulos.

N	Área
150	7,09714349
2500	7,0703623
10000	7,069030825
45000	7,068683193
175000	?
720000	?

¿Debemos seguir haciendo tantos cálculos o intentamos buscar otra forma más sencilla para resolver este problema ...?

Si visualizamos gráficamente esta situación, a medida que el número n de rectángulos es cada vez más grande observamos que la suma de sus áreas se acerca cada vez más al área real de la región.



En este caso podemos decir que el área real es el límite de esas sumas cuando n crece indefinidamente, lo que puede escribirse:

Área ≈ $\lim_{n\to\infty}$ (suma de las áreas de los n rectángulos)

$$Area = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x$$

Es bueno saber que el método de aproximación usado es básico para la comprensión intuitiva del Cálculo Integral.

Si calculamos el área utilizando la fórmula del área de un círculo y teniendo en cuenta que el área sombreada es la cuarta parte del área del círculo de radio 3 con centro en el origen resulta:

Área $= A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} * \pi * 9 \approx 7{,}068583471$.

2.3.3 Definición de integral

La integración es el proceso inverso de la diferenciación. La integración nos da la libertad para dirigir en el espacio. Se pueden clasificar en dos tipos, a saber, la integración indefinida y la integración definida. Una integración indefinida es aquella que no tiene límites, mientras que una integración definida es aquella que está integrada con respecto a ciertos límites. La notación convencional de la integral definida es la siguiente,

$$\int_a^b f(x)dx$$

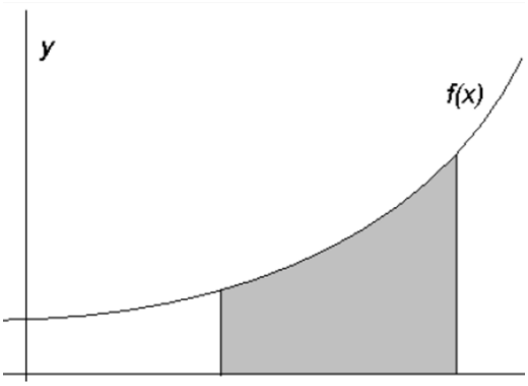
Encima se muestra la integración definida de algún f(x) dentro del intervalo [a, b]. Es importante que la función dada, la cual será integrada para algún intervalo sea continua para el intervalo en el cual se va a integrar. La integral de Riemann es un caso especial de la integral definida en la cual x es esencialmente un número real. Una integral definida se representa más comúnmente como,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta x$$

Aquí, la función dada se divide en n intervalos de igual longitud n

$$\frac{a+b}{n}$$

yi es un punto arbitrario que se selecciona de cada intervalo.



3 METODOLOGIA

El presente informe corresponde a una investigación cualitativa descriptiva con metodología investigación acción, para determinar el impacto que tienen las estrategias pedagógicas para enseñar integrales al ser aplicada en la comunidad objeto de estudio la cual está conformada por 81 estudiantes de los grados 11 de la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño.

Instrumentos de recolección de la información

En el desarrollo de la practica formativa no se pudo aplicar ningún instrumentó para la recolección de la información; solo lo que se pudo analizar en el cuadro de impacto con los aspectos positivos y negativos por parte de los estudiantes y aspectos a mejorar del actuar como docentes.

Fase 1: Revisión teórica

Durante el desarrollo del curso se lograron analizar ciertos fundamentos que soportan teóricamente del presente informe.

Fase 2: Diagnostico

La docente titular de la Institución comento que ya estaba trabajando con los estudiantes el tema de integra, pero no les había enseñado el concepto sino solo la representación algébrica y las reglas de integración.

Fase 3: Diseño de actividades didácticas

Luego de saber que los estudiantes no conocen el concepto y sistemas de representación de la integral, se requiere escoger y diseñar la secuencia para lograr tener una aproximación a este concepto a través del programa Cabri.

Fase 4:* Implementación y análisis de resultados*:

Se implementó la secuencia didáctica por medio de la investigación cualitativa descriptiva y la observación directa. Por último se realiza los respectivos análisis que se pudieron observar con el diseño e implementación de la secuencia didáctica.

4 RESULTADOS Y ANALISIS

Luego de haber realizado las dos intervenciones en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño, y de llevar a cabo este proyecto, se pueden hacer los siguientes análisis:

Durante el curso de Línea de Profundización III, se leyeron y analizaron algunos referentes teóricos como lo son Derecho a la educación, Lineamientos curriculares, la Ley 115, Unidad didáctica, Diario de campo, Investigación acción, Estándares curriculares, Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, entre otros que se utilizaron como fundamento del presente informe de práctica.

En la fase diagnostica no se pudo determinar el estado inicial de los estudiantes, debido a que solo se podía realizar un encuentro con cada grupo de 11 y el tiempo no alcanzaba para hacer un pretest formal, sin embargo se realizó un sondeo (Ver Anexo A) con cinco preguntas que de alguna manera daba preámbulo a la temática.

La docente titular de la Institución explico que los estudiantes no sabían el concepto de integral simplemente porque el tiempo no alcanzaba para realizar algunas actividades que aproximaran a los estudiantes a estos conceptos, pero que ellos debían de llevar unas bases de las propiedades y algoritmos para poder solucionar una integral.

Debido a esta dificultad que se estaba presentando, se decidió escoger unas estrategias para diseñar una secuencia didáctica donde se pudiera evidenciar el concepto de integral a través de sus sistemas de representación, por este motivo y para que sea innovador se decide utilizar el programa de Cabri, donde se puede utilizar diversos recursos y construcciones geométricas.

Las actividades que se realizaron en el encuentro son:

- Sondeo sobre integral (Anexo A)
- Manejo del programa Cabri (Anexo B)
- Circunferencia llena de polígonos (Anexo c)
- Calculo de áreas por descomposición de polígonos (Anexo D)
- Calcular el área por el método de exhaucion (Anexo E)

A continuación se mostrara un cuadro metodológico donde se podrá evidenciar cada una de las actividades que se realizó y cuál era el objetivo que se quería lograr con cada una de ellas.

ACTIVIDAD	CONCEPTOS RELACIONADOS	METODOLOGIA
Sondeo	• Área • Integral • Integral definida • Integral indefinida • Aplicaciones	Inicialmente se hace la presentación con todos los estudiantes, y se habla un poco de las actividades a realizar, luego se realizan cinco preguntas (Anexo A) a todo el grupo para que ellos participen y saber el estado conceptual que tienen los estudiantes con temas relacionados al concepto de integral, área, las interpretaciones y mencionar algunas aplicaciones.
Manejo del programa Cabri	• Punto intersección • Punto sobre objeto • Polígono regular • Compas • Trasferencia de medidas • Mediatriz	Antes de iniciar con la construcción de la representación geométrica de integral, es necesario explicar un poco el manejo del programa, las herramientas que tiene y algunas de las cosas que se pueden hacer (Anexo B).
Circunferencia llena de polígonos	• Circunferencia • Circulo • Polígono regular • Área de polígonos • Altura de triángulos	Se procede a dibujar una circunferencia, donde se van a ir inscribiendo polígonos regulares que cada vez va aumentando el número de lados y por consiguiente disminuyendo la medida de estos

	• Margen de error	lados, iniciando con el polígono de tres lados, es decir un triángulo equilátero, para que los estudiantes puedan evidenciar que cada vez que se van aumentando el número de lados, el área del polígono regular se va aproximando al área del circulo (Ver anexo C). Luego de haber hecho visible esta actividad, se calcula el área de los polígonos regulares y del círculo, aplicando el teorema de Pitágoras para calcular la altura de cada uno de los triángulos en los que se divide el polígono regular y así poder hallar el área de cada uno de las figuras. Por último se elabora una tabla y una gráfica relacionando el número de lados, el área del círculo, el área de los polígonos y el margen de error entre las dos áreas.
Calculo de áreas por descomposición	• Región sombreada • Calcular la medida de superficies • Restar superficies • Descomposición de figuras en polígonos	Con esta actividad se quería que los estudiantes lograran visualizar que si se tiene una figura donde no es fácil calcular el área, se debe descomponer o rellenar con polígonos que sea fácil determinar el área para luego sumarlas y poder saber cuál es el área de la figura

		inicial (Anexo D). Por este motivo se decide que las figuras no sean curvas para que primero sea más visual el cálculo de áreas para luego explicar el método de Exhaucion al tratar de hallar el área de figuras curvas.
Método de Exhaucion	• Altura de la curva • Sumatoria de áreas • Área bajo la curva • Área en exceso • Área por defecto • Área de figuras curvas • Surgimiento del concepto de integral • Variación en las alturas de la figura	Para enseñar el método de exhaucion se decide utilizar un cuarto de circulo con el fin que se le pueda calcular fácil el área de dicho circulo para que los estudiantes puedan concluir que a medida que vamos aumentando el número de rectángulos el área va siendo aproximadamente el mismo que el del cuarto de circunferencia (Ver Anexo E)

En el desarrollo de la clase se pudo observar cual fuel el impacto de cada una de las actividades y además de esto se puede determinar si esa estrategia fue la adecuada o no para la aproximación del concepto de integral a través de algunos sistemas de representación. A continuación se mostrara el cuadro de impacto de acuerdo a cada una de las estrategias implementadas.

ACTIVIDAD	ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS	ASPECTOS A MEJORAR
Sondeo	Algunos estudiantes tenían la disposición para participar en clase, como la docente no les enseño la parte conceptual uno de los estudiantes busco el concepto de integral copiándolo en su cuaderno pero no comprendiendo la definición.	La mayoría de los estudiantes no tienen claro los conceptos como área que lo aprendieron desde primaria, por este motivo se encontraban dispersos en esta actividad.	Falto darles más tiempo a los estudiantes, para que reflexionaran y apropiaran cada uno de los conceptos que se estaban tratando, además como tienen vacíos conceptuales sobre todo en el ámbito de la geometría, fue necesario explicarles y darles prácticamente las respuestas porque no sabían que contestar.
Manejo del programa	Esta actividad llamo la atención de los estudiantes, ellos nunca habían	Los estudiantes no profundizan las temáticas ya estudiadas, debido	Como ya fue mencionado, falta construir los conceptos

	tenido una clase enseñándole a manejar algún programa y menos de matemáticas, tres estudiantes solicitaron el nombre del programa y como se podía instalar.	a que ellos no tienen claro el concepto de punto intersección, rectas paralelas, rectas perpendiculares, polígonos regulares, mediatriz, entre otros.	geométricos como punto de intersección, punto sobre objeto, mediatriz, polígonos regulares. Y cuando se habló con la docente luego de terminar la clase reflexiono sobre la falta de estos conceptos geométricos y aclaro que geometría es del cuarto periodo académico, pero como no tienen los materiales y recursos necesarios, no se les enseñaban estos temas a los estudiantes.
Circunferencia llena de polígonos	Con esta estrategia se capturo la atención de los estudiantes, ellos	Lo que se evidencio en esta clase es la falta de apropiación de los	En esta actividad falto hacer la aclaración de que es un círculo y cuál

	atendieron y concluyeron cumpliendo el fin de esta estrategia. Comprendieron que cada vez que se va aumentado su número de lados va abarcando más área, acercándose al área total del círculo.	teoremas y propiedades ya vistas en clase, no saben interpretar ni utilizar el teorema de Pitágoras. Además tuvieron dificultad con el uso de la calculadora, no dominan los signos de agrupación para logra hacer una operación completa sin tener que hacerlo paso a paso, perdiendo mucho tiempo en estas operaciones. Hubo dificultad en la parte conceptual relacionado con los temas geométricos, diferenciar un círculo de circunferencia, cálculo de áreas de polígonos.	es la circunferencia. Se quedó corto el tiempo para la actividad, porque solo se pudo calcular el área de 3 figuras y sería mucho más significativo para los estudiantes haber calculado uno a uno el área de los polígonos y construir toda la tabla con los resultados que ellos estaban encontrando.

Calculo de áreas por descomposición	Al principio los estudiantes tuvieron dificultad porque no sabían cómo calcular el área de la figura que se tenía, sin embargo luego de unos minutos se logró descomponer dicha figura entre un triángulo y un rectángulo donde era más sencillo calcular el área. En el segundo momento ya sabiendo el valor de la medida de la superficie del área rosada, se inscribe un nuevo polígono azul, queriendo calcular el nuevo polígono de color rosado, ellos analizaron bien lo que se les estaba pidiendo y fue más sencillo que dedujeran que para	Falta de tiempo para resolver actividades similares.	En esta actividad surgió una duda, la cual consistía en un cuadrado que tenía una rotación de 90° con uno de sus vértices (Ver Anexo D), algunos estudiantes pensaron que era un rombo, pero a través del programa se pudo medir cada uno de los lados de la figura y al observar que eran iguales se concluía que era un cuadrado. Sin embargo al calcular el área del cuadrado daba el mismo resultado que si se empleaba la fórmula del área de un rombo.

	calcular el área rosada, debían de restarle al área ya calculada la superficie del polígono azul y de esta manera saber el valor de la superficie de la figura rosada (Ver Anexo D).		
Método de Exhaucion	Algunos estudiantes se interesaron en la actividad, tratando de entender el método para calcula el área bajo la curva.	Esta es la actividad que más tiene sentido en el concepto de integral, todas la estrategias diseñadas ayudan a dar una aproximación al concepto de integral, pero este fue el primer método que se utilizó para calcular el área bajo la curva por lo tanto era el más impactante. Cuando se llegó a esta actividad solo quedaban 15 minutos para terminar la clase, entonces los estudiantes ya estaban dispersos y esperando el cambio de clase, por este motivo no tuvo el significado y valor que se esperaba. Los estudiantes presentaron dificultad, porque no sabían cuál es la ecuación que determina una circunferencia, ni era claro que cuando se tiene una expresión	

		elevada al cuadrado al calcularle las raíces exactas el resultado puede llegar a ser tanto positivo como negativo.

Luego de haber implementado esta secuencia didáctica en la institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño se pudo determinar que estrategias fueron adecuadas para la aproximación a este concepto. Con las preguntas del sondeo, se supo que los estudiantes no tenían claro conceptos como área, integral definida e indefinida, la diferencia entre ellas y algunas aplicaciones, es decir que fue útil la actividad, aunque como no se tuvo el tiempo necesario, la actividad fue abierta y solo con los estudiantes que estaban interesados, seguramente si se hubiese tenido más tiempo se haría de manera individual para que cada uno de los estudiantes reflexionaran sobre estos conceptos y después socializarlo con todo el grupo.

Para el manejo del programa también falto tiempo pero sobre todo faltaron los recursos necesarios, es decir, computadores con el programa Cabri para que trabajaran y exploraran ellos mismos el programa y no que la única persona que interactuara con estos recursos fuera el profesor. Sin embargo esto llamo mucho la atención de los estudiantes y quedaron interesados con este programa, aunque falto mostrarles más las utilidades y aplicaciones de dicho programa.

Para la estrategia de la circunferencia con polígonos circunscritos fue la que tuvo un mayor impacto y comprensión por parte de los estudiantes, pues ellos mismos llegaron a la conclusión que a medida que se iban aumentando el número de los lados del polígono regular, el área de este se aproximaba más al área del círculo, y lograron dar una buena interpretación a la gráfica y la tabla, analizando las tendencias y limites que se estaban presentando.

Antes de iniciar con el método de exhaucion, se consideró necesario calcular áreas por descomposición de polígonos, para que ellos quedaran con la noción que cuando se tiene una figura que no se le puede calcular el área de una manera fácil, es necesario descomponerla en figuras a las que si se les pueda calcular el área. Por este motivo se utilizó una figura donde se podía descomponer en un rectángulo y un triángulo y la segunda se podía calcular restando las áreas, donde ellos llegaron a esa determinación y comprendieron bien esta actividad de tal manera que pudieron solucionar todos los ejercicios.

Cuando se llegó con los estudiantes al método de exhaucion, ya quedaba poco tiempo para poder hacer la actividad y calcular las áreas por exceso y por defecto, por este motivo solo se calculó el área por exceso, aunque se hizo la aclaración que el cálculo de áreas por defecto es de la misma manera, solo que los rectángulos no van a sobresalir de la figura sino que van a estar totalmente inscritos en ella.

En esta actividad hubo dificultad en despejar la función que estaba determinando la curva de la figura, y de esta manera calcular la altura de los rectángulos; sin embargo, con la ayuda del programa Cabri fue más sencillo hacer la simulación y mostrar que cada vez que aumentaban el número de rectángulos la sumatoria del área de los rectángulos se aproximaba a el área de la figura curva.

CONCLUSIONES

Al culminar la práctica formativa en la Institución Educativa Gilberto Álzate Avendaño, se formalizo algunas conclusiones teniendo en cuenta las cuatro fases del informe, y los resultados obtenidos durante las diferentes actividades realizadas.

- A pesar del corto tiempo para el desarrollo de las actividades, se logró la aproximación intuitiva del concepto de integral, encontrando sentido y comprensión a la representación algebraica que se había presentado en clases anteriores.

- Cuando se inició el diseño de estrategias para la aproximación del concepto de integral, primeramente se buscó en los lineamientos curriculares, en los estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional y no se encontró nada referente a la noción de integral en el grado 11, es preocupante que los docentes sigan con la mentalidad de abarcar la mayor temática posible, dejando a un lado los vacíos que tienen algunos estudiantes, tanto conceptual como procedimental por la falta del desarrollo del pensamiento y los cinco procesos básicos de matemáticas propuestos en los Lineamientos Curriculares, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, modelación, comunicación y ejercitación enfocados a problemáticas en contextos no solo matemáticos sino aplicándolos a otras ciencias.

- Realizar actividades innovadoras, genera un impacto positivo en los estudiantes, motivándolos a la autonomía en la búsqueda del conocimiento; y facilita la comprensión de los conceptos matemáticos porque al utilizar el programa Cabri se utilizan otros sistemas de representación distintos al formal y algebraico.

- Se observó la falta de interés por parte de los estudiantes frente a las actividades que se estaban realizando, como son estudiantes de once y sobre todo ya a punto de terminar el año escolar y salir del colegio, es evidente la falta de apropiación de algunos estudiantes con respecto a la temática presentada.

- Es necesario incluir en el Plan de estudios algunas temáticas relacionadas con geometría, se identificó el vacío conceptual que tienen los estudiantes frente a conceptos como rectas paralelas, rectas perpendiculares, polígonos regulares, mediatriz, entre otros.

RECOMENDACIONES

- En primer lugar, es recomendable que los docentes reflexionen su actuar y visualicen cuales son los objetivos de la educación y que se quiere lograr con los estudiantes de acuerdo al horizonte institucional. Lo importante no es enseñar todo, la finalidad es que los estudiantes aprendan, para esto Comenio da unas recomendaciones donde quizás las más importantes, ir de lo más fácil a lo más difícil y siempre ir de lo particular a lo general.

- Es importante que la Institución invierta en algunos recursos didácticos para cada una de las áreas y sobre todo en software educativos para poder enseñar situaciones problema a través de la modelación.

- Aunque se quiso iniciar la práctica formativa lo antes posible, se presentaron algunos obstáculos con la primera Institución, esto retraso mucho la práctica, tanto así que casi no se puede realizar práctica en ninguna Institución porque ya estaban finalizando el año escolar y por este motivo solo se pudo realizar un encuentro.

- También cabe mencionar, la importancia de la fecha de práctica, debido a que cuando se realizan terminando el segundo semestre del año lectivo, los estudiantes se encuentran finalizando el año escolar, y solo le dan importancia a culminar sus materias con éxito para poder salir a vacaciones o si ya han pasado la asignatura quieren hacer lo mínimo y no esforzarse por superarse cada día.

BIBLIOGRAFIA

- http://www.icfes.gov.co/investigacion/component/docman/doc_view/15-informe-resultados-de-colombia-en-timss-2007-resumen-ejecutivo?Itemid

- http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/w3-article-318377.html

- http://www.icfes.gov.co/investigacion/component/docman/doc_download/145-estudios-sobre-calidad-de-la-educacion-en-colombia?Itemid

- ICFES. Estadísticas y resultados de las pruebas del ICFES. Sitio Web: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/historicos/

- **http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf**

- Constitución Política de Colombia. Artículo 67. Derecho a la Educación.

- MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

- Diseño de unidades didácticas en el área de ciencias experimentales

- Luis rico, universidad de granada los organizadores del currículo de matemáticas

ANEXOS

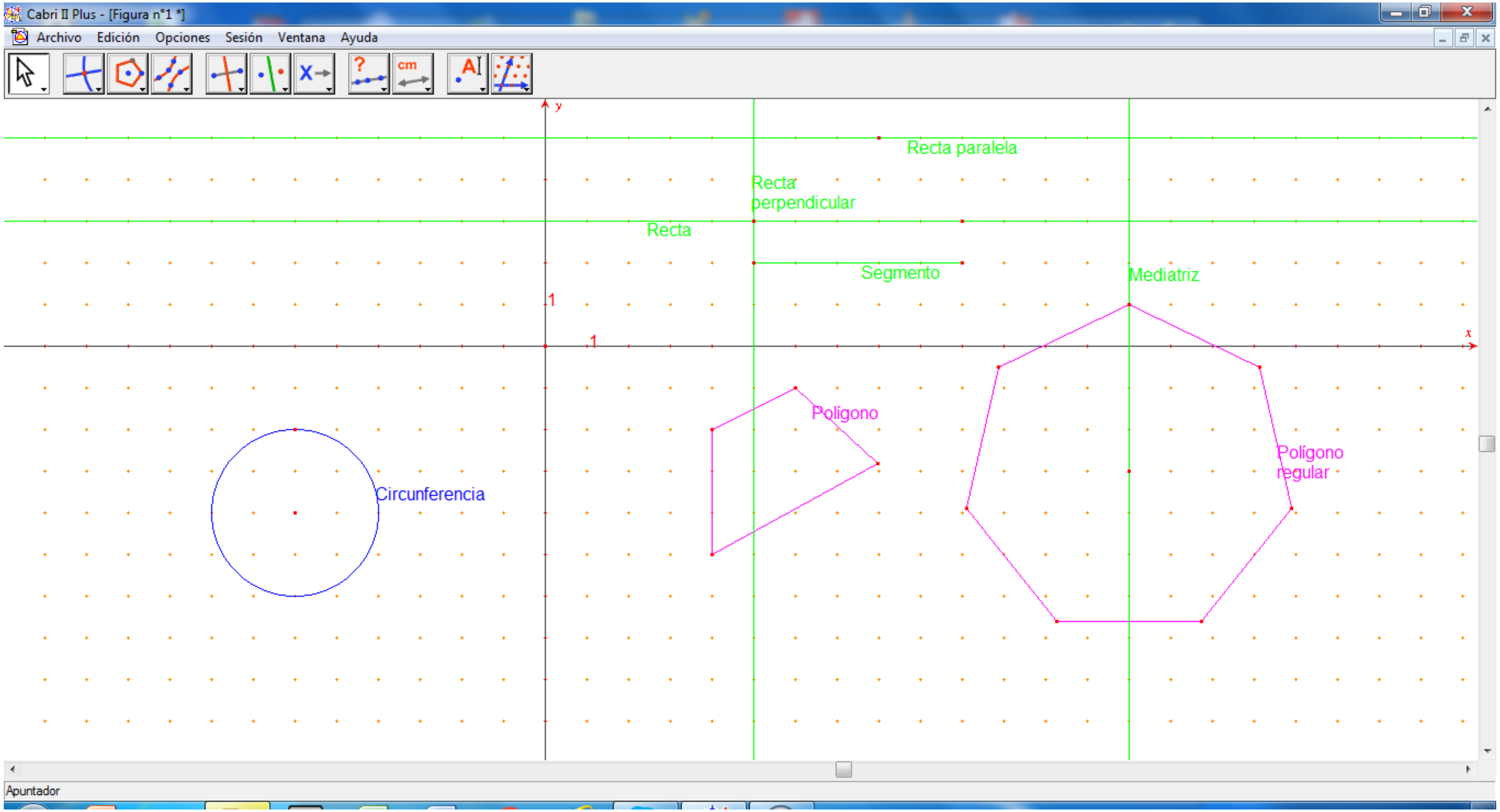
ANEXO A

SONDEO

- ¿Qué es área?
- ¿Qué temas han visto de integral?
- ¿Qué es integral?
- ¿Cuál es la diferencia de integral definida e indefinida?
- ¿En que se pueden utilizar las integrales?

ANEXO B

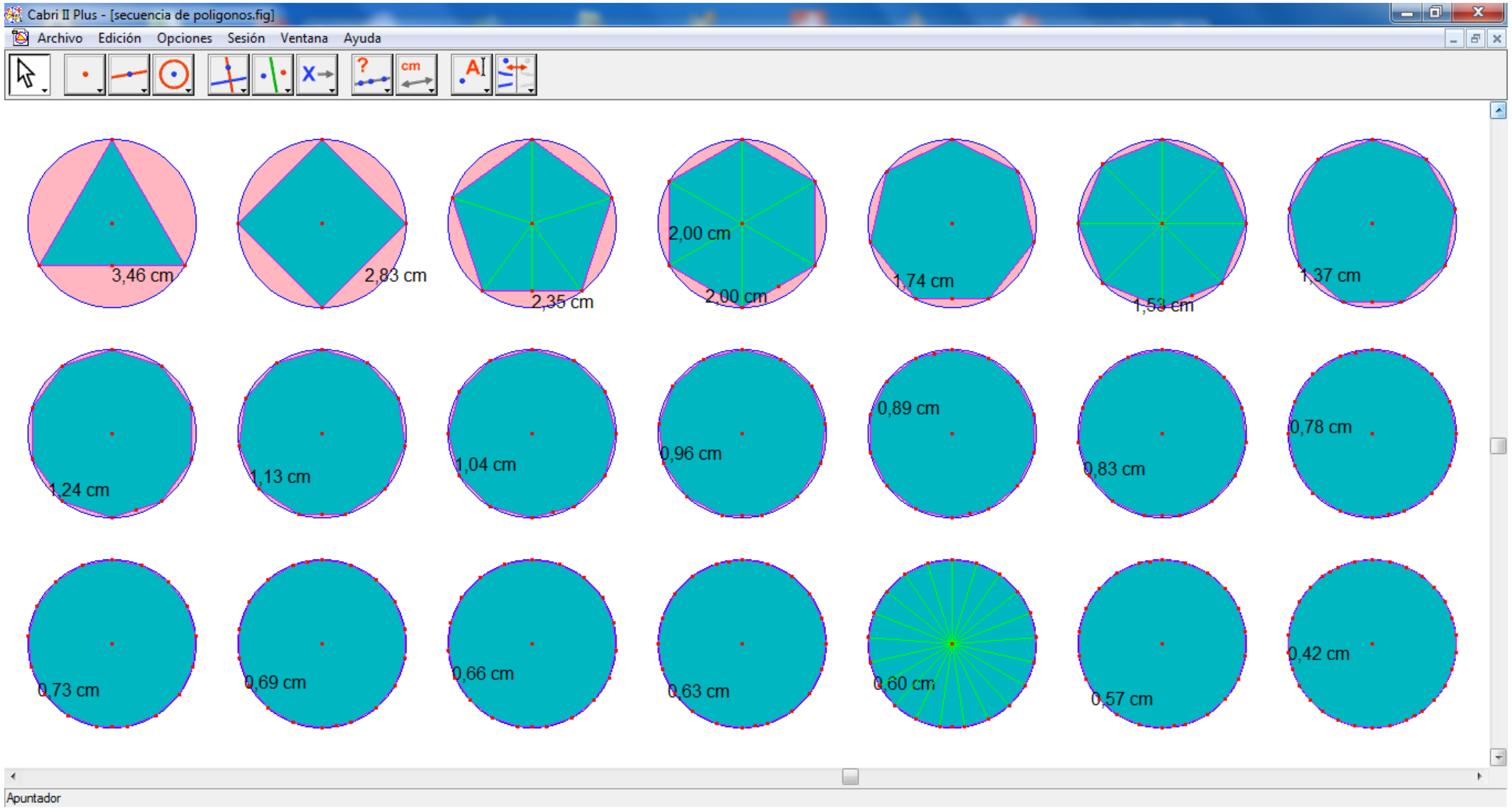
MANEJO DEL PROGRAMA



ANEXOS C

CIRCUNFERENCIA LLENA DE POLIGONOS

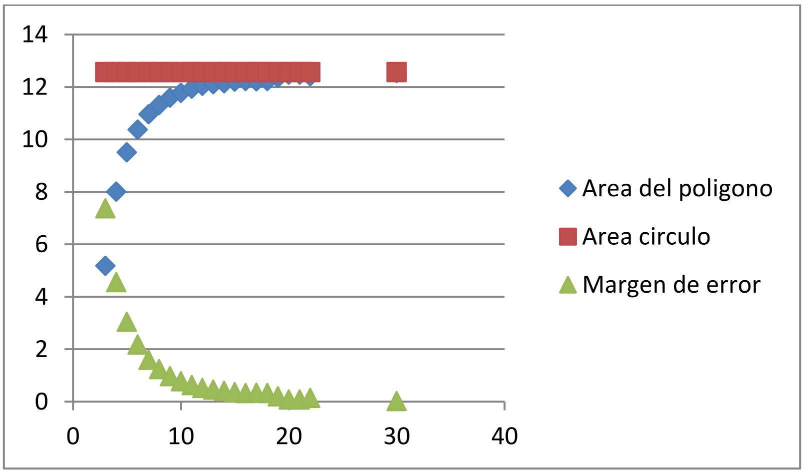
- **Secuencia de polígonos**



- **Tabla relación área del polígono, área del circulo y margen de error**

Número de lados	Área del polígono	Área circulo	Margen de error
3	5,19	12,57	7,38
4	8,0089	12,57	4,5611
5	9,5175	12,57	3,0525
6	10,38	12,57	2,19
7	10,962	12,57	1,608
8	11,322	12,57	1,248
9	11,5902	12,57	0,9798
10	11,78	12,57	0,79
11	11,9328	12,57	0,6372
12	12,0432	12,57	0,5268
13	12,1056	12,57	0,4644
14	12,1485	12,57	0,4215
15	12,201	12,57	0,369
16	12,2304	12,57	0,3396
17	12,22385	12,57	0,34615
18	12,2337	12,57	0,3363
19	12,3519	12,57	0,2181
20	12,474	12,57	0,096
21	12,474	12,57	0,096
22	12,4146	12,57	0,1554
30	12,537	12,57	0,033

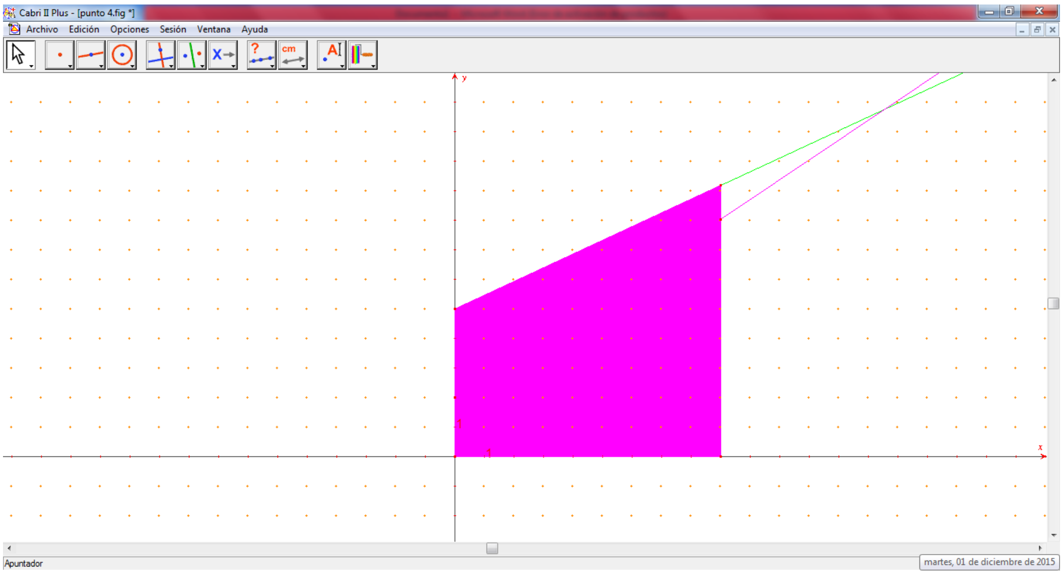
- **Grafica relación área del polígono, área del circulo y margen de error**



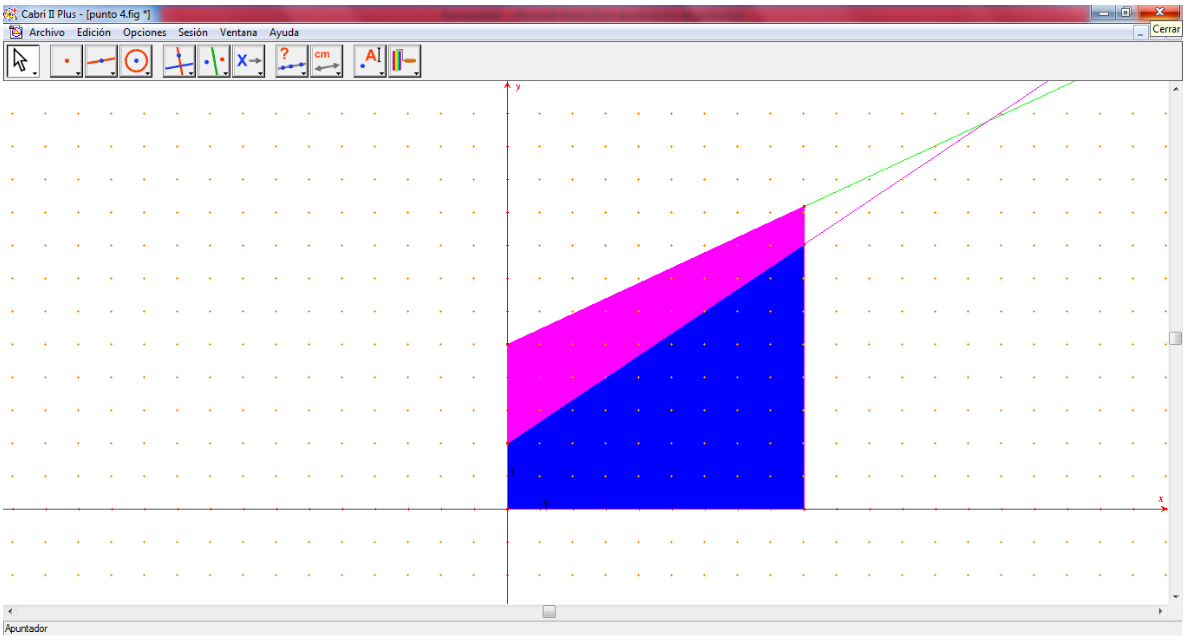
ANEXO D

CALCULO DE AREAS POR DESCOMPOSICION

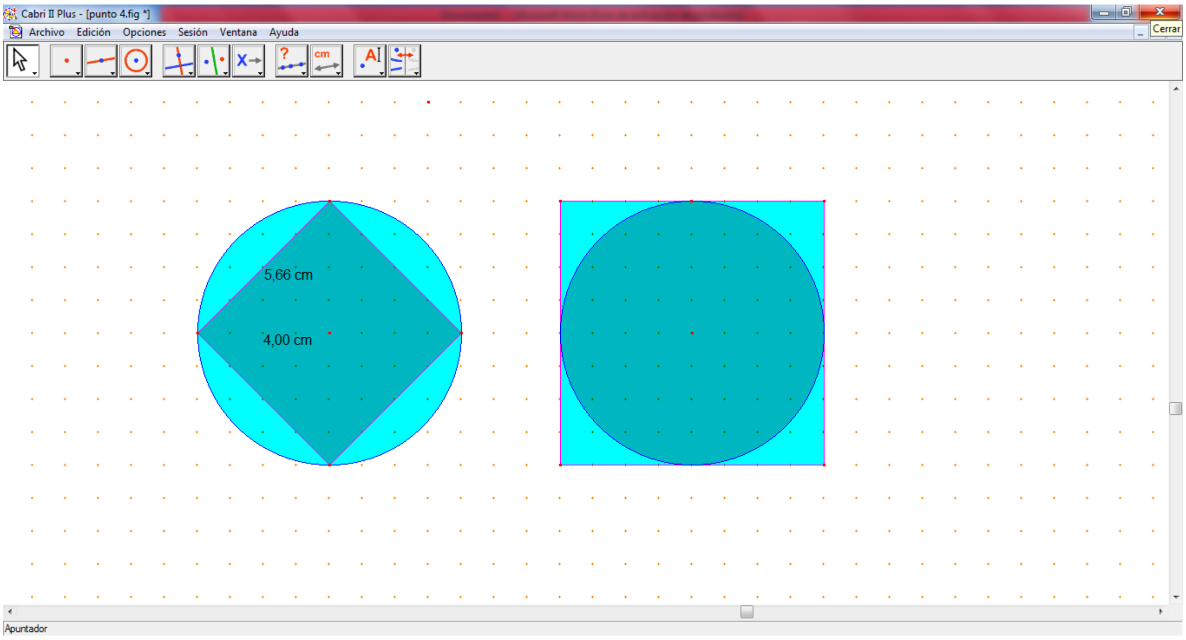
- **Calcular el área de la figura**



- **Calcular el área de la región rosada**



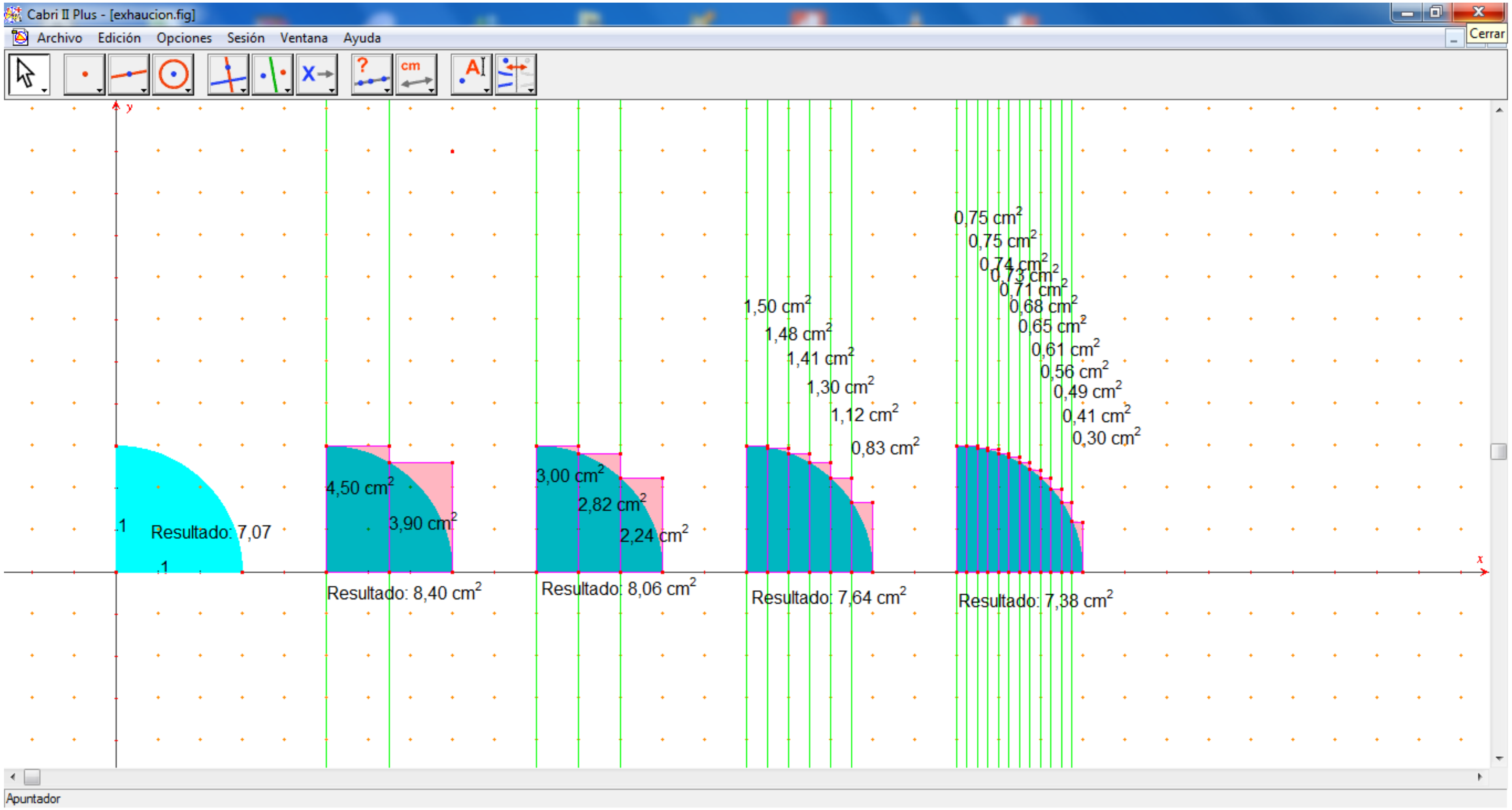
- Encuentre el área color turquesa


Cabri II Plus - [punto 4.fig *]
Archivo Edición Opciones Sesión Ventana Ayuda
Cerrar
5,66 cm
4,00 cm
Apuntador

ANEXO E

METODO DE EXHAUCION

- Área por exceso



- Áreas por defecto