MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Equipo investigador perteneciente al grupo **SUMMA**:

JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

RAFAEL ÁLVAREZ JIMÉNEZ

ORLANDO MESA BETANCUR

GUSTAVO SALDARRIAGA RIVERA

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

2007

Contenido

1 MARCO TEÓRICO 8

1.1 Educación Matemática 8

1.2 M□del□ pedagógic□ y ren□vación curricular 9

1.3 Te□rías de aprendizaje 10

1.4 La evaluación 15

1.5 Situación pr□blema 17

1.6 C□mpetencias, destrezas y habilidades 18

1.7 Categ□rías de c□mpetencias 24

1.7.1 C□mpetencia interpretativa de enunciad□s matemátic□s 25

1.7.2 C□mpetencia interpretativa de m□del□s matemátic□s 26

1.7.3 C□mpetencia pragmática y c□municativa 26

1.7.4 C□mpetencia creativa 27

1.7.5 C□mpetencia c□ntrastativa 27

1.7.6 C□mpetencia Argumentativa 28

1.7.7 C□mpetencia Dem□strativa 28

1.8 El aprendizaje significativ□ 28

1.9 L□s mapas c□nceptuales 30

1.10 L□s mapas c□nceptuales y la c□mpetencia c□municativa 31

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 34

2.1 Pr□blema de Investigación 35

2.1.1 El baj□ desempeñ□ de l□s estudiantes de últim□ grad□ de bachillerat□ 35

2.1.2 Deserción en l□s primer□s semestres universitari□s 38

2.2 Pr□blema Objet□ de la investigación 40

3 METODOLOGÍA 42

3.1 Objetiv□ general 42

3.2 Objetiv□s específic□s 42

3.3 Investigación cualitativa 43

3.3.1 P□blación 43

3.3.2 Muestra 43

3.3.3 Unidad de Análisis 44

3.4 Fases de la Investigación 44

3.4.1 Desarrollo de la segunda fase 45
3.5 Diseño metodológico 48
3.6 **SITUACIÓN PROBLEMA** 4: TRIGONOMETRÍA 49
4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y TRATAMIENTO ESTADÍSTICO 88
4.1 Análisis de los resultados obtenidos 88
4.2 Evaluación diagnóstico 89
4.2.1 Evaluación del proceso 90
4.2.2 Evaluación final 94
4.3 Análisis comparativo en diferentes momentos de la evaluación 95
4.4 Análisis de los resultados por competencias 99
4.4.1 Competencia interpretativa 99
4.4.2 Competencia creativa 100
4.4.3 Competencia comunicativa 101
4.4.4 Los mapas conceptuales y la competencia comunicativa 103
4.4.5 Competencia argumentativa 105
4.4.6 Competencia contrastativa 106
4.4.7 Competencia pragmática 107
4.5 Análisis comparativo para la situación entre las competencias. 107
4.6 Análisis comparativo con el grupo control 108
4.7 Criterios para la certificación de los estudiantes. 110
5 CONCLUSIONES 112
6 BIBLIOGRAFÍA 116
7 ANEXO 1: SITUACIONES PROBLEMA SELECCIONADAS 118
7.1 **SITUACION PROBLEMA 1:** FUNCIONES POLINÓMICAS Y ECUACIONES 118
7.2 **SITUACION PROBLEMA 3:** DESIGUALDADES 132
8 ANEXO 2: SITUACIONES PROBLEMA DISEÑADAS Y AJUSTADAS 142
8.1 **SITUACION PROBLEMA 2:** FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARITMICA 142
9 ANEXO 3: PRUEBAS Y SUS FORMATOS PARA LA EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS 150
9.1 Prueba diagnóstico 150
9.2 Prueba de seguimiento (o en el Proceso) 151
9.3 Prueba parcial 157
9.4 Prueba examen final 160
10 ANEXO 4: PARTICIPACIÓN EN EVENTOS Y PUBLICACIÓN DE TEXTOS 166
10.1 RESUMENES DE LAS PONENCIAS 166

10.1.1 MODELO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIA MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN (XVI Congreso Nacional de Matemáticas 2007). 166

10.1.2 MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS 167

10.1.3 PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS RESUELTOS DESDE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA, CON EL USO DEL CABRI. 167

10.1.4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES GEOMETRICAMENTE, USANDO EL CABRI 168

10.1.5 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE 169

10.1.6 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE 170

10.1.7 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE 171

10.1.8 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar)..... 172

10.1.9 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar)..... 172

10.1.10 DISEÑO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS (TRIÁNGULO DE PASCAL). UTP..... 173

10.1.11 EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA. (Universidad Simón Bolívar)..... 173

10.1.12 MATEMÁTICA CREATIVA. (Universidad Simón Bolívar). 173

10.1.13 UN VIAJE FANTÁSTICO A TRAVÉS DEL “CUENTO” DE LAS COMPETENCIAS COMUNICATIVAS Y MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar)..... 174

10.1.14 DISEÑO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA MATEMÁTICA Y LA INGENIERÍA. (Universidad Simón Bolívar). 174

10.1.15 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS(XIII Congreso de ERM). 175

10.1.16 Lecciones Matemáticas: una estrategia de escritura para intervenir los niveles de deserción y pérdida de los estudiantes (XIII Congreso de ERM)..... 175

10.1.17 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS(III E.M.Caribe.). 178

10.1.18 Lecciones Matemáticas: una estrategia de escritura para intervenir los niveles de deserción y pérdida de los estudiantes (III E.M.Caribe)..... 178

10.2 LIBROS PUBLICADOS: EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA (Sello editorial Universidad de Medellín)..... 180

CAPÍTULO: 180

10.2.1 MODELO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA UNIVERSITARIA. 180

10.2.2 EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA..... 180

10.3 Cursos de capacitación 183

10.3.1 Diplomado en asocio con la Secretaria de Educación del Municipio de Medellín. 183

11 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DE PRUEBAS DIAGNOSTICO. 184

1 MARCO TEÓRICO

Aportar a la parte conceptual y teórica pero al mismo tiempo, a la interpretación de los resultados de la investigación, *Modelos de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas en la formación básica en la Universidad de Medellín,* es el propósito del planteamiento del siguiente marco teórico, que incluye una referencia sobre la Educación Matemática, línea de investigación del grupo SUMMA, en la cual se enmarca el trabajo; se plantea además algunas teorías sobre el aprendizaje, la evaluación; conceptos sobre competencias, habilidades y categorías de las mismas con sus respectivos indicadores de logro y en general, todo aquello que tiene que ver con competencias y planteamiento de situaciones problema.

1.1 Educación Matemática

La educación tal y como se mira actualmente, con todo el desarrollo tecnológico de por medio y el escenario condicionado por el fenómeno de la globalización, debe asegurar la formación de ciudadanos competentes para el trabajo productivo y la vida en sociedad, es por eso que el replanteamiento de la educación desde esta perspectiva y, particularmente en el campo de la Educación Matemática, como disciplina relativamente nueva, ha cobrado la importancia que actualmente se le da.

La Educación Matemática como disciplina aborda, entre otros aspectos, los relacionados a la didáctica, aprendizaje y enseñanza de las matemáticas con la implementación de tendencias curriculares que deben adecuarse a los tiempos que se viven y a las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las mismas en los diferentes contextos socioculturales, en todos los niveles educativos pero justamente, en los niveles básico y medio donde se presentan las mayores dificultades que posteriormente se reflejan en la Educación Matemática de los niveles superiores.

Ahora bien, el carácter global y dialéctico de la Educación Matemática como disciplina pero también como sistema social, se relaciona de manera compleja con otras disciplinas, en este apartado se referencian algunos ejemplos: la historia y la epistemología aportan la génesis y evolución del conocimiento científico; la sociología la interdependencia entre ciencia y sociedad y su influencia en la formación de los individuos; la lingüística tributa la comprensión de los problemas conceptuales propios de las dificultades del aprendizaje; la sicología el conocimiento del desarrollo de las personas y de los modelos teóricos para el análisis del conocimiento a enseñar y en

general, todo lo que tiene que ver con el aprendizaje humano y, la pedagogía que analiza las relaciones de la enseñanza en el marco de las instituciones escolares.

Sin embargo, en la alusión anterior no puede dejarse de lado la tecnología, que en Educación Matemática está centrada fundamentalmente en el empleo de calculadoras, computadoras y en general, de herramientas que ayudan a ampliar y extender el pensamiento crítico y el espacio de los conocimientos.

Como puede verse esta relación de disciplinas le permite a la Educación Matemática avanzar y obtener resultados, producto de investigación, en: cambios en las metodologías, replanteamientos de las didácticas, cambios curriculares, práctica docente, procesos de aprendizaje, empleo de la tecnología, renovación curricular y, últimamente lo que tiene que ver con la implementación de programas para intervenir los altos índices de deserción y pérdida de los estudiantes.

La investigación en Educación Matemática, hoy en día de gran auge, incluye investigaciones de corte descriptivo basadas en observaciones o registros de la realidad estudiada; investigaciones explicativas de gran solidez, teóricamente hablando por ser muy atrevidas en los modelos de investigación que plantean; de igual manera las investigaciones contrastativas y aplicativas cobran actualmente gran valor.

1.2 Modelo pedagógico y renovación curricular

Desde el año 1998 la Universidad de Medellín empezó un proceso de reflexión profunda, con toda la comunidad educativa acerca de su modelo pedagógico. Fruto de ello a partir del año 2004 se pone en marcha un modelo pedagógico propio, construido a partir del acta de fundación de la Universidad con una dinámica y estructura curricular muy propia para direccionar la comunicación académica y de conocimientos entre profesores y estudiantes; a la fecha este modelo sigue otorgando identidad y legitimidad a los procesos de formación que propicia la universidad en aras de mejorar la calidad de la educación que imparte y su proyección a la sociedad a la cual se debe.

La Misión de la Universidad[1] se inscribe y se enuncia desde la promoción de la cultura y la formación integral. Es así que la enseñanza libre, la solución de problemas,

[1] Misión de la Universidad de Medellín: *Fundamentada en su lema "ciencia y libertad", la Universidad de Medellín tiene como misión la promoción de la cultura y la formación integral de profesionales que contribuyan a la solución de problemas en las áreas de los saberes propios, mediante la docencia, el fomento de la investigación y la interacción con la sociedad.*

la Ciencia y la Libertad son los pilares que la fundamentan y le dan su razón de ser.

La solución de problemas, como principio del modelo pedagógico, guía los planteamientos didácticos tanto en formación como en investigación. Los procesos y situaciones problemáticas, inherentemente, median procesos investigativos. Se considera entonces, en el proceso de solucionar un problema la incorporación de la lógica de la investigación con la cual la humanidad ha construido sus conocimientos.

El conocimiento bien sea científico, técnico o tecnológico, artístico o empírico, en su construcción, en sus resultados y en aplicaciones, se problematiza siguiendo un método. Método que el profesor contextualiza, mediante metodologías desagregadas en estrategias didácticas que se desarrollan en sesiones directas con el profesor, sesiones independientes del estudiante, configurando así grupos y subgrupos para habitar espacios diversos y construir, a partir de la formación en investigación, productos académicos que se muestran a la comunidad universitaria mediante procesos comunicativos que son objeto de evaluación, en cuanto certificación social del conocimiento aprendido.

La formación integral, la formación en Ciencia y Libertad, la formación en investigación, la solución de problemas, la flexibilidad curricular, la interdisciplinaridad, la contextualización los campos de conocimientos, los objetos y campos de conocimiento, las unidades de organización curricular, el trabajo por competencias; entre otros, son los componentes transversales del modelo pedagógico que dinamizan la actual renovación curricular de la Universidad de Medellín.

El anterior planteamiento materializado ya en los espacios académicos de la Institución motiva a docentes y estudiantes a la aplicación de modelos de situaciones problema que ofrezcan nuevas alternativas para el aprendizaje y permitan la movilización e identificación de competencias que dejen espacios para un mejor desenvolvimiento en la vida laboral y social de los futuros egresados de la Universidad.

1.3 Teorías de aprendizaje

Sin entrar a ahondar mucho en estas teorías de aprendizaje es bueno abordar, como una manera de contextualizar los resultados de la investigación, los aportes de J. Piaget en la psicología cognitiva y la elaboración del pensamiento matemático, de G.

Pólya en el planteamiento y solución de problemas y de D. Ausubel en lo que a aprendizaje significativo se refiere.
Para Piaget, son fundamentales los cambios que se producen en la formación de la inteligencia del ser humano desde el nacimiento hasta adquirir el estado de madurez, los cambios en la estructura mental son permanentes y se refinan progresivamente. En la teoría de Piaget se encuentran una ruta de significados precisos para abordar el pensamiento matemático que pueden llegar a ser fundamentales en el intento de solucionar problemas.

El principio de reversibilidad, por ejemplo, referida a un par de operaciones matemáticas básicas donde no se puede comprender una de ellas sin la otra, verbigracia suma y resta, multiplicación y división; es un aporte de Piaget que ayuda a buscar relaciones entre las mismas para abordar la solución de problemas matemáticos.

Otra característica cognitiva a la que hace alusión Piaget y que conduce al mismo fin, es decir, solucionar problemas, es la reflexibilidad. "La reflexibilidad o *toma de conciencia* es la manifestación de la abstracción reflectora -como un espejo- que los humanos realizamos sobre las acciones y relaciones con los objetos de cualquier clase, incluyendo los simbólicos"[2]. Esta característica según esta apreciación, permite descubrir la relación existente entre las propiedades físicas de los objetos y la propiedad matemática, así por ejemplo cuando de contar un conjunto de objetos se trata, el resultado es independiente de cómo se disponga el orden de conteo, es decir, la conmutatividad de los elementos no influye en el resultado; esto es lo que en el lenguaje matemático de los estudiosos del pensamiento lógico se conoce como las experiencias físicas y las experiencias lógico-matemáticas. Las primeras hacen referencia a la experiencia sensorial y física sobre los objetos y las segundas son el resultado de las reflexiones que hace el individuo sobre estas acciones.

Además de las anteriores Piaget plantea otras características cognitivas que ayudan a la solución de problemas matemáticos, así entonces, la indagación por lo posible, la habilidad para manejar algoritmos, la estructuración y la capacidad de anticipación son elementos cruciales a tener en cuenta para hallar una solución inteligente a un problema.

---

[2] MESA B, Orlando. Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Instituto de Educación no formal—Centro de Pedagogía Participativa, 1998. P. 9.

Para Pólya la formulación de situaciones *problemáticas* adecuadas que pongan a prueba la curiosidad de los estudiantes y la posible solución mediante preguntas estimulantes, puede derivar en el gusto por el pensamiento independiente y una buena oportunidad para que las matemáticas adquieran el mejor de los sentidos.

Las matemáticas presentadas a la manera euclidiana, ponen de manifiesto una ciencia rigurosa, sistemática y deductiva. Apostar por la propuesta de George Pólya, es recuperar la estrategia *heurística* como posibilidad de mediar los procesos de aprendizaje.

En la propuesta de Pólya el término estrategia que procede del griego *stratégia*, utilizado en la vida militar para indicar el arte de dirigir las operaciones militares, es fundamental, aquí las estrategias heurísticas constituyen la táctica que se utiliza para lograr encontrar los medios necesarios al resolver un problema.

Los métodos heurísticos, con los reparos que se les pueda encontrar, son una enorme oportunidad para abordar situaciones problema por parte de profesores y estudiantes; preguntas reiterativas como: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿Es un problema por resolver?, ¿Es un problema por demostrar?, ¿Es un problema rutinario?, ¿Conoces un problema relacionado con este?, ¿Algún teorema o concepto es útil?, ¿Te hace falta un elemento auxiliar?, ¿Podrías imaginarte un problema análogo?, ¿Has empleado todos los datos?, entre otras; median los procesos del aprendizaje y como en la mejor de las redes se entretejen para relacionar y poner en conversación constante a profesores y estudiantes.

En el intento de resolver situaciones problema, a la manera de Pólya, cuatro reglas de oro emergen en el mejor de los juegos: La comprensión del problema, la configuración de un plan o estrategia, la ejecución u operatividad de la estrategia y la visión retrospectiva para examinar la solución obtenida.

Emplear las estrategias de solución atinando una lista de preguntas pertinentes para resolver nuestros propios problemas de la vida cotidiana y acogernos siempre con pasión y alegría a nuevas situaciones y preguntas que puedan revelarnos nuevos aspectos de estos y otros problemas, que despierten nuestro interés y nos haga trabajar y reflexionar, son una excelente oportunidad para encontrar una matemática en constante dinámica y evolución.

Para David Ausubel, es en el aprendizaje donde el alumno relaciona lo que ya sabe con los nuevos conocimientos, es decir sus experiencias representan un factor de mucho peso, es por ello que el docente debe enfocar su labor facilitadora y enseñar en consecuencia de lo que descubra sobre lo que el alumno ya conoce.

Ausubel plantea que, "…el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, debe entenderse por *estructura cognitiva*, al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.[3]"

Para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz para lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente con base en experiencias del alumno, ello significa que antes del aprendizaje de un concepto matemático el docente debe explorar lo que el alumno conoce sobre el tema, solo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a sus estructuras cognitivas.

Para aprender significativamente, se debe buscar que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo hacia la autonomía, al momento de pensar de modo tal, que desarrolle su inteligencia, relacionando de manera integral lo que tiene y conoce respecto a lo que quiere aprender.

Desde esta perspectiva, todo docente de matemáticas debe promover que el alumno trabaje y construya sus propios aprendizajes, buscar su autonomía es un fin fundamental para que integren sus experiencias a otras ya conocidas y elijan lo que desean aprender y no buscar sólo el desarrollo de la memoria y la repetición como alternativa de aprendizaje.

El aprendizaje significativo persigue entre otros aspectos, romper con el tradicionalismo memorístico que busca y desarrolla solamente la memoria y la repetición; de igual manera, se preocupa por los intereses, necesidades y otros aspectos para que el deseo de aprender del alumno tenga significado y sea valioso para él, de allí se derivan, claro está, el interés por el trabajo y las experiencias en el aula.

Se sabe además que si el aprendizaje se logra de modo memorístico y mediante la repetición, al poco tiempo se olvidará siendo este efecto más notorio en la parte matemática; esto obedece a que los nuevos conocimientos se incorporarían en forma

---

[3] www.educainformatica.com.ar/docentes/tuarticulo/educacion/ausubel/

arbitraria en la estructura cognitiva del alumno y, él no lograría integrar los nuevos conocimientos con los previos, es por esto entonces, que el alumno no concede valor a los contenidos presentados por el profesor y solo estudian para el momento. Por su parte, el aprendizaje significativo mediado por la construcción de lo que conoce puede las habilidades de pensamiento más rápidamente.

Por su importancia se puntualizan algunas características del aprendizaje significativo:

1. Los nuevos conocimientos se fijan más fácilmente en las estructuras cognitivas del alumno.

2. Relaciona los nuevos conocimientos con los conocimientos previos que tiene el estudiante.

3. Toma en cuenta los intereses, necesidades y realidades del alumno, de ahí su interés por aprenderlo, porque lo considera valioso.

Ahora bien, algunas de las ventajas del aprendizaje significativo para la enseñanza de las matemáticas son:

1. El alumno tiene una retención más duradera del concepto matemático; este tipo de aprendizaje modifica la estructura cognitiva del alumno mediante reacomodos de la misma para integrar la nueva información.

2. El que aprende puede adquirir nuevos conocimientos de la matemática con mayor facilidad, relacionando los ya aprendidos con los nuevos, en forma significativa, ya que al estar claramente presentes en la estructura cognitiva se facilite su relación con los nuevos contenidos.

1.4 La evaluación

La evaluación pedagógica, la acepta hoy todo el mundo, no debe ser puntual sino integral, y cuando es *cualitativa* da una mejor información sobre los logros y las carencias y dificultades de los estudiantes, que cuando es simplemente cuantitativa. Afortunadamente, la revolución que se viene presentando en la filosofía de la educación y más concretamente en las estrategias de intervención, obliga al abandono de los métodos incorrectos, con pretensiones cuantitativas, para interpretar los aprendizajes significativos.

En el contexto de la educación, y en casi todos sus niveles, se ha recurrido al concepto de número para establecer escalas de registro que se suponen indicadoras del estado y grado de las competencias y los comportamientos mentales, transponiendo instrumentos y métodos propios de las ciencias naturales y la matemática a los complejos y todavía imprecisos fenómenos que son las conductas humanas. Esta práctica viene creando serios problemas de interpretación y de acción, cuyas consecuencias llegan a ser vitales para los individuos y la sociedad. Todo porque los registros obtenidos son generalmente usados para calificar o descalificar a los estudiantes frente a su desempeño actual o futuro en un espacio particular de aprendizaje o trabajo, poniendo en tela de juicio la validez, consistencia y pertinencia de la evaluación.

Ahora bien, el concepto de evaluación adquiere sus significados en contextos teóricos y prácticos específicos cuya variabilidad impone interpretaciones y prácticas que deben ser coherentes con los respectivos marcos de referencia. Así, por ejemplo, hoy predomina la concepción que interpreta la evaluación como fundamentalmente *cualitativa e integral*; esto es, la que se infiere a partir de la observación y el análisis de los procesos, frente a las concepciones *cuantitativas-puntuales* que ponen el énfasis en la medición de logros. Sin embargo, aparecen ambigüedades cuando se quiere precisar lo que realmente se entiende por *evaluación de l□gr□s y pr□ces□s* o cuando se pretenden evaluar las competencias mentales de los individuos y sus actuaciones.

Ante este tipo de circunstancias entonces, la necesidad de evaluar, particularmente la que hace referencia a los procesos de aprendizaje constituye una acción crucial y un componente fundamental en el desarrollo del acto educativo. Un postulado está implícito cuando se habla de evaluación: *es necesari□ evaluar.* No de otro modo es posible distinguir los cambios de estado en los aprendizajes y comportamientos de las

personas; sin la evaluación, la discriminación positiva sería imposible y todas las respuestas serían aceptadas como válidas, promoviéndose la clasificación y masificación de los individuos con el consecuente fomento del individualismo en detrimento de la individualidad.

Teniendo como fondo las necesidades antes enunciadas, no debe perderse de vista que la evaluación de un proceso, es una actividad que requiere de mucha planeación dado su carácter de acción continua y sistemática, por ello es fundamental y justamente en los procesos de enseñanza aprendizaje, considerar los siguientes momentos como fundamentales: evaluación de estado inicial o diagnóstica, evaluación durante el proceso de intervención y, evaluación de estado final relativo. Cada uno de estos momentos y como su nominación indica, hacen alusión a cada una de las etapas de desarrollo del proceso que se requiere evaluar.

Así al comenzar un proceso educativo, con un grupo o con un estudiante, es fundamental conocer, con la mayor precisión posible, el estado inicial de los estudiantes frente a los indicadores considerados como determinantes o representativos del proceso que se planea desarrollar durante la acción educativa. La claridad de los docentes sobre los significados de los indicadores determinará las características del proceso a seguir con ese grupo o estudiante.

La evaluación durante el proceso de intervención, depende de la evaluación inicial y de las estrategias de intervención utilizadas, se interpretan los cambios en los comportamientos y en los logros observables. Esta evaluación es, fundamentalmente, formativa. Se interesa más en la cualificación de los comportamientos matemáticos que en logros terminales y debe estar diseñada alrededor de *situaciones problemáticas* que faciliten una gran variedad de competencias específicas que incluyan el uso de métodos, técnicas y heurísticos de todo tipo.

Al final de cada estrategia de intervención planeada entra a jugar un papel importante la evaluación de estado final relativo, aquí se aplica una valoración general del estado de los indicadores, para aplicar los ajustes necesarios y adecuar las nuevas estrategias de acuerdo con los resultados, positivos y negativos, que se observen durante el proceso. Aquí tiene sentido conocer con más precisión el estado de algunos logros, recurriendo a la aplicación de pruebas escritas, presentación de trabajos y exposiciones colectivas por parte de los estudiantes. Se trata de interpretar los rendimientos obtenidos frente a los propósitos planteados. También deben considerarse, aquí las mejoras en la preparación matemática y en las actitudes de los

estudiantes para continuar avanzado en el estudio de temas específicos, lo que se traduce en disposición y ganas de aprender.

1.5 Situación problema

En general, escribe Orlando Mesa, "una situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una *situación problema* se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático"[4] , definición que tiene como punto de partida la noción que tienen de lo que es un *problema* dada por Piaget, Polya y Garret, entre otros.

En este orden de ideas y para los efectos, propósitos y estrategia pedagógica que la investigación propone, se ha considerado además de la anterior definición, la forma como se procesa o se plantea una situación problema que motive y desencadene razonamientos de orden matemático, que incorpore el planteamiento de preguntas abierta y cerradas y que finalmente contribuya al desarrollo de las competencias lógico matemáticas, cual es el propósito.

Para plantear una situación problema, el docente requiere tener en cuenta las siguientes actividades que le dan cuerpo al proceso:

1. *Definición de una red conceptual*. Esta red tiene que ver con tener a disposición un referente de algún saber que se ajuste a las condiciones sociables e individuales de los estudiantes.

2. *Escoger un motivo*. Es una situación del contexto que sea capaz de facilitar actividades y el planteamiento de preguntas abiertas y cerradas.

3. *Fijar varios estados de complejidad*. Este estado de complejidad va encaminado a regular las actividades y el grado de dificultad de las preguntas que el estudiante debe enfrentar.

4. *Proponer una estrategia*. Aquí es importante la didáctica y los momentos de enseñanza y aprendizaje para que afloren las propuestas creativas.

---

[4] MESA B, Orlando. Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Instituto de Educación no formal—Centro de Pedagogía Participativa, 1998. P. 15.

5. *Ejercitación*. Escoger ejercicios adecuados, es decir, prototipos que deben comprender los estudiantes.

6. *Ampliación, cualificación y desarrollo de los conceptos tratados*. Una situación problema que se diga interesante tiene que ofrecer esta opción a los estudiantes.

7. *Implementar una estrategia de evaluación de las competencias*. Esta es tal vez la actividad más difícil de implementar; la evaluación de competencias a través de logros de las mismas, requiere la implementación de una forma de evaluar muy seria y cuidadosa.

1.6 Competencias, destrezas y habilidades

La propuesta que se presenta se fundamenta en los desarrollos actuales de la didáctica de las matemáticas, entendida esta no en el sentido tradicional del término, es decir como la disciplina que permite la instrumentalización de la enseñanza de las matemáticas, sino como un campo de investigación que permite la elaboración teórica de los problemas relativos a la producción y comunicación de los saberes y conocimientos matemáticos en contextos escolares. De esta manera la práctica profesional del docente entra a ser conceptualizada como un campo de indagación y reflexión sistemática en constante desarrollo.

Por otra parte, la presencia de grandes masas de estudiantes en las instituciones educativas exige investigar nuevos y creativos procedimientos para acompañar las diferencias individuales durante el aprendizaje. Diferencias, no sólo cognitivas sino, fundamentalmente culturales.

Por eso para avanzar en la búsqueda de soluciones hacia el cambio de estado del sistema educativo es necesario diseñar y ejecutar nuevos programas de formación de profesores de modo que los procesos de enseñanza-aprendizaje incorporen los elementos teóricos y prácticos que las actuales investigaciones vienen reconociendo como determinantes para una buena educación. En este sentido, cualquier proyecto educativo que se pretenda como alternativo deberá someterse a un análisis crítico, *los fines, los contenidos temáticos y las prácticas pedagógicas habituales*, para buscar un aprendizaje significativo; lo que implica una recontextualización y revaluación de todo el proceso educativo en el espacio de una nueva visión sobre la educación que se desea intervenir.

La situación planteada origina preguntas como las siguientes: ¿De qué manera se pueden y deben repensar y reconstruir los currículos vigentes en las instituciones educativas, en particular en la Universidad de Medellín, para que se adapten a las nuevas necesidades? ¿Cuáles son las estrategias didácticas más eficaces para ayudar a construir pensamiento matemático? ¿Cómo pueden incorporarse las nuevas tecnologías en los planes de formación, de modo que el estudiante no asuma una actitud pasiva y poco crítica frente al inmenso mundo de la información disponible? ¿Cuál es el nuevo papel del docente en el proceso de aprendizaje? ¿Es posible diseñar y aplicar un sistema de certificación de *competencias matemáticas*, en donde no se promedien ignorancias y conocimientos, y en su lugar se reconozcan los logros y no se afirmen las fallas y carencias como se evidencia en la concepción actual? ¿Qué metodología puede seguirse para validar, cualificar y fomentar los aprendizajes logrados por fuera de las instituciones que garanticen una educación de calidad, donde la cualificación del docente, las prácticas pedagógicas apropiadas en el aula y la relevancia del aprendizaje sean los elementos fundamentales para lograr aprendizajes más significativos?

Desde el punto de vista de los interrogantes anteriores no puede seguirse pensando que la Educación Matemática que todo ciudadano debería alcanzar tenga que limitarse a la acumulación de informaciones sobre conceptos y procedimientos, al contrario, debe predominar, en ella, la adquisición de competencias, *cognoscitivas y académicas*, además de habilidades y destrezas que le permitan resolver los problemas que le presenta el entorno sociocultural donde vive y trabaja y se desenvuelve como ser social.

Ahora bien, como en cada área y sector del conocimiento se vienen construyendo teorías, procedimientos e instrumentos para evaluar lo que llaman competencias, habilidades y destrezas; es necesario hacer explícito el marco conceptual y práctico que le dé significado y sentido a la propuesta, sobre todo desde la perspectiva del trabajo por competencias, como se verá a continuación.

Las competencias de origen académico se refieren a lo que todo estudiante debe saber relacionado con una disciplina particular y su aplicación significativa. En el caso de las matemáticas los referentes para seleccionar este saber son de tres tipos: *El referente universal de la disciplina matemática, el de la cultura regional y el referente a los intereses y motivaciones individuales*.

Se acepta entonces, que *la comprensión de conceptos matemáticos* es la competencia fundamental buscada con la enseñanza en el área de las matemáticas. Sin embargo,

las investigaciones de las últimas décadas, sobre las posibilidades para aprender significativamente, han demostrado q□e, para la mayoría de las personas, los procedimientos expositivos no permiten el aprendizaje significativo, q□e sí se logra más fácilmente con procedimientos en donde el est□diante participe activamente en la constr□cción de s□s pensamientos. En este sentido es q□e hoy se habla de constr□ctivismo en la esc□ela (o más adec□adamente: *construccionismo*), a pesar de las múltiples, variadas y a veces contradictorias interpretaciones y prácticas con este concepto. En síntesis, la comprensión de conceptos matemáticos se interpreta act□almente como *construcción de pensamiento matemático*. La gran ventaja de este p□nto de vista radica en la libertad q□e da a est□diantes y docentes para presentar concepciones diferentes a las q□e aparecen en los saberes formalizados o instit□cionalizados.

Sin embargo, en c□anto al significado de la formación matemática hoy predominan las concepciones q□e dan más peso al pensamiento matemático como competencia cognoscitiva q□e como competencia c□lt□ral; es decir, se b□sca q□e las personas s□peren el conocimiento de las informaciones matemáticas, est□diadas como simple herramientas, y avancen hacia los métodos de razonamiento y constr□cción mental propias del est□dio y creación de las estr□ct□ras relacionadas y relacionables con las matemáticas.

El sentido de la formación matemática debe llegar, tanto al individ□o como a la sociedad de la q□e forma parte, por lo tanto, es necesario ay□dar a comprender q□e □na adec□ada formación en el pensar matemáticamente es indispensable para acceder en c□alq□ier sector de la c□lt□ra, con eficiencia y alta calidad. Esto se hace evidente aceptando q□e el pensamiento matemático facilita interpretar las ideas alrededor de conceptos organizadores como son los de relación, operación (procedimiento o algoritmo), sistema, estr□ct□ra, teoría y explicación, pero c□ya semántica inicial se p□ede detectar en los contextos socioc□lt□rales q□e rodean a las personas.

Además, la formación matemática posee □n □so cada vez mayor, sobre todo en dos direcciones: a) como mediadora para resolver problemas, mediante el □so de conceptos matemáticos y de métodos de sol□ción y b) como portadora de formas com□nicativas, variadas, eficaces, económicas y eficientes.

Es importante entonces, intentar diferenciar la competencia matemática - como elemento fundamental de la razón cognoscitiva humana - del ejercicio o ejecución de esa competencia en la solución de tareas específicas, ya se trate del aprendizaje o de la producción de constructos culturales. Aunque nadie puede resolver significativamente un problema matemático sin la cultura matemática que lo permita, también es cierto que una gran cantidad de los problemas resueltos con las competencias matemáticas no pertenecen a la cultura matemática. De cierto manera es válido afirmar que *existe una competencia matemática para asimilar el mundo*, sin cuyo ejercicio se empobrecen las asimilaciones.

Las competencias cognoscitivas se refieren a las estructuras o esquemas mentales que permiten el acceso al conocimiento, su comunicación y su uso. Todas las teorías del aprendizaje las reconocen, implícita o explícitamente.

Es costumbre asociar las habilidades matemáticas refiriéndolas a expresiones como: razonamiento lógico, habilidad numérica, capacidad de análisis, razonamiento por analogía, interpretación de algoritmos, creatividad, resolución de problemas, capacidad anticipadora, capacidad de estructuración, entre otras. Sin embargo, generalmente no se hacen explícitos los significados asignados a cada una de las expresiones ni las diferencias y relaciones entre ellas. Quizá la dificultad para la precisión requerida se deba a que es necesario recurrir a muchos y variados sectores del conocimiento para acercarse un poco a la definición de esos conceptos.

Por ejemplo, en lo que atañe al perfil del matemático y el tipo de problemas que debe abordar, Beth[5] refiriéndose a la tipología de los matemáticos, recuerda la distinción hecha por Poincaré entre los *lógicos* que recurren al análisis para resolver los problemas, y los *intuitivos* que recurren a la geometría; pero afirma que es necesario tener en cuenta otros principios, diferentes a los corrientes utilizados para tipificar a los matemáticos. Propone considerar:

1. *El carácter más o menos consciente de las operaciones mentales que eventualmente conduzcan a la solución de los problemas que se traten de resolver.*
2. *La índole de tales operaciones mentales: operaciones que manejen palabras, símbolos, imágenes espaciales o temporales, representaciones visuales, auditivas, motrices, entre otras.*
3. *Las exigencias relativas al rigor.*

---

[5] Piaget, J y E. W. Beth. *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona: Grijalbo, 1980. P. 103. Traducción castellana de Víctor Sánchez Zavala.

4. *La amplitud o restricción del campo de intereses.*
5. *La preferencia por el trabajo solitario o por el trabajo en común.*

Beth, también distingue tres clases de problemas matemáticos, según las exigencias para la solución:

1. *Los problemas cuya solución no exija otra cosa que la aplicación correcta de cierto procedimiento rutinario.*
2. *Los problemas cuya solución pida que se apliquen inteligentemente determinados métodos más o menos corrientes, y*
3. *Los problemas para los cuales los métodos corrientes no proporcionen solución alguna.*

Puede observarse como, para Beth, las habilidades matemáticas están relacionadas no sólo con la tipología de los comportamientos matemáticos, sino también con el tipo de problemas planteados y los intereses actitudes de quienes enfrentan o plantean los problemas.

Es posible, entonces, interpretar las competencias matemáticas como *capacidades para construir modelos, validarlos en casos particulares y demostrarlos dentro de una teoría específica.*

La definición, en plural, busca afirmar la existencia de más de una competencia matemática, de acuerdo con los referentes iníciales del modelo. Así, los referentes visuales o geométricos originan modelos diferentes a los propios de los referentes numéricos o preposicionales, y en cada caso es posible encontrar una infinidad de variedades

Se puede interpretar un modelo como un esquema representativo de una estructura, conjunto de objetos entre quienes existe, como mínimo, una relación. Son ejemplos de modelos: las fórmulas matemáticas, las obras artísticas, los algoritmos como procesos para encontrar un resultado, los diseños, los planos a escala, los mapas, las gráficas de ecuaciones y relaciones. Como puede inferirse de la definición, los modelos permiten diferentes tipos de representación de acuerdo a los significantes utilizados: icónicos o arbitrarios.

A cada modelo le corresponde una metodología para argumentar su validez, es decir su utilidad para resolver interrogantes en un sector particular de problemas.

En cuanto a la demostración, consiste en recurrir a la lógica para poder aceptar la verdad matemática del modelo pero, acogiendo una orientación didáctica moderna, la argumentación debe primar y preceder sobre la demostración lógica matemática.

Resolver un problema nuevo, por cualquier método, o resolver un problema viejo, por métodos nuevos, es la situación normal de una inteligencia en ejercicio; es el camino seguido por el hombre para crear la segunda naturaleza. Toda la producción humana: herramientas, máquinas, teorías científicas y artísticas, y en general la cultura, no es más que el gran conjunto de respuestas obtenidas frente a complejos espacios de interrogantes.

Sin embargo, la participación de los individuos en esta gran tarea es, raras veces, sobresaliente. Gran parte de la vida de una persona está dedicada al aprendizaje de problemas ya resueltos, o a la utilización de respuestas conocidas para afrontar los problemas que le presenta la cotidianidad. Con este sentido es necesario aprender el uso de las matemáticas, anteriormente creadas, de acuerdo con las necesidades en cada sector del conocimiento. Este uso puede resumirse en dos capacidades, a saber: las capacidades de aplicar y simular modelos; la primera exige que el modelo sea interpretado, no sólo en su forma sintáctica, sino también semánticamente, la segunda, es decir, la capacidad de simulación se entiende como la posibilidad de imitar un modelo o un proceso real o imaginario, aquí se analizan las consecuencias de hipótesis o condiciones supuestas para investigar alternativas de solución a problemas.

Las habilidades que se han venido nombrando como matemáticas, como puede verse, cubren todo el campo del conocimiento humano; pero ocurre que no todas las personas pueden aplicar estas competencias en el campo de las matemáticas y las ciencias, ya sea por condiciones socio-culturales, afectivas o de otra índole; pero *sí* las requiere todo el mundo para una relación cualitativamente mejor con sus entornos sociales y culturales; de aquí la importancia de promover estas habilidades en la formación básica de cualquier persona.

1.7 Categorías de competencias

La clasificación de las competencias para el trabajo académico en la Universidad de Medellín se desprende de la estructura curricular propuesta en su Modelo Pedagógico; así mismo se define competencia como la capacidad de una persona para contribuir con posibilidades de éxito a la solución de problemas a través de conocimientos científicos, técnicos, tecnológicos o artísticos.

Para la clasificación de las competencias se tiene en cuenta los siguientes grupos de ellas:

1. Competencias cognitivas básicas

--Interpretativa. Comprender una situación en un contexto específico.
--Argumentativa. Fundamentar o sustentar un planteamiento, una decisión o un evento.
--Propositiva. Plantear alternativas de decisión o de acción y de establecer nuevas relaciones o vínculos entre eventos o perspectivas teóricas

2. Competencias comunicativas: leer, escribir, hablar, escuchar según los requerimientos de una determinada situación.

3. Comunicación en una lengua extranjera: compresión lectora en tanto lenguaje técnico.

4. Utilización de herramientas tecnológicas: Procesar información en programas básicos y gestionar información.

5. La formación en investigación: resolver problemas mediante aquellas competencias derivadas de los métodos científicos: deductivo, inductivo, heurístico, abductivo y hermenéutico

Del grupo de competencias antes mencionada, las de interés a desarrollar en el planteamiento de situaciones problema en matemáticas se ubican en el grupo 1 y 2. Es decir las competencias cognitivas básicas y las competencias comunicativas; todas ellas interactúan de manera tal que pueden dar lugar a la nominación de otras competencias como la pragmática, la contrastativa y la creativa.

En el desarrollo de la presente propuesta de investigación, las competencias anteriores fueron las tenidas en cuenta considerando además, para efectos de evaluación, sus respectivos indicadores de logro, como el profesor Orlando Mesa[6] lo indica a continuación:

El alumno ha asimilado el pensamiento matemático como un proceso generador de relaciones, modelos y estructuras. Ello lo evidencia al aceptar la estructura matemática, tanto desde el lenguaje común como desde el lenguaje formal; ya sea en la interpretación y solución de problemas como en la modelación de situaciones cotidianas o de fenómenos tecnológicos.

1.7.1 Competencia interpretativa de enunciados matemáticos

Indicadores de logro

1) Reconocen relaciones: afectivas, espaciales, sociales,…
2) Crean nuevas relaciones a partir de relaciones conocidas.
3) Traducen enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático.
4) Traducen enunciados del lenguaje matemático al lenguaje natural.
5) Simbolizan enunciados sobre operaciones y relaciones en el pensamiento numérico.

6) Simbolizan enunciados sobre operaciones y relaciones en el pensamiento Algebraico usando: símbolos generalizadores de las operaciones y relaciones numéricas, símbolos generalizadores de las propiedades para las operaciones y las relaciones numéricas.

7) Simbolizan enunciados sobre operaciones y relaciones en el pensamiento geométrico empleando elementos y relaciones geométricas básicas con medidas tri, bi y unidimensionales.

8) Simbolizan definiciones geométricas básicas.
9) Reconocen y crean relaciones geométricas.
10) Reconocen y crean operaciones numéricas.
11) Reconocen y crean operaciones geométricas.

[6] MESA B. Orlando. Competencias matemáticas, segunda parte. Material por publicar.

1.7.2 Competencia interpretativa de modelos matemáticos

Indicadores de logro

1) Identifica las relaciones y operaciones a partir de una representación verbal de las situaciones.
2) Recurre a dibujos, representaciones icónicas, para representar relaciones y operaciones.
3) Acepta representaciones no icónicas de las relaciones.
4) Crea representaciones no icónicas para relaciones y operaciones.
5) Reconoce representaciones matemáticas para las relaciones y operaciones.
6) Dado un modelo matemático, de una relación o de una operación, puede aplicarlo a casos particulares.
7) Amplía la significación dada a un modelo de manera que incluya una nueva situación.
8) Reconoce sistemas matemáticos en fenómenos tecnológicos.
9) Identifica las propiedades estructurales de un sistema matemático.
10)Comprende los siguientes conceptos específicos: El significado de las fórmulas como modelos, La diferenciación entre parámetros y variables, La particularización de las fórmulas, El álgebra con los modelos algebraicos, El modelo y estructura general de las funciones, El modelo de las funciones y ecuaciones lineales, El modelo de los sistemas de ecuaciones, El modelo de las funciones y ecuaciones cuadráticas, El modelo de las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, El modelo de las relaciones entre los lados de triángulos semejantes, El modelo de las funciones trigonométricas, El modelo de un sistema matemático general, El modelo de las estructuras de grupo y de campo, El modelo del álgebra de Boole.

1.7.3 Competencia pragmática y comunicativa

Indicadores de logro

1) El alumno interpreta problemas, y al descubrir su estructura, la formaliza en un algoritmo, el cual sintetiza toda la lógica del problema. Específicamente, da cuenta de las siguientes capacidades: Para resolver y plantear problemas con uso de la aritmética, Para resolver y plantear problemas con uso del álgebra, Para resolver y

plantear problemas con uso de la geometría, Para resolver y plantear problemas con uso de los tres tipos de pensamiento.

2) Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representación en la interpretación y solución de problemas, conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema.

1.7.4 Competencia creativa

Donde el alumno pone a prueba sus conocimientos para interpretar o modelar nuevas situaciones, que encuadren en el modelo en cuestión.

Indicadores de logro

1) Encuentra el procedimiento, la relación o la operación para resolver un problema planteado.
2) Crea un nuevo procedimiento, nuevo para él, en la solución de un problema.
3) Diseña modelos para plantear nuevos problemas.
4) Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un nuevo problema.
5) Diseña modelos matemáticos en la solución de problemas, usando algoritmos conocidos.
6) Tiene la capacidad para diseñar modelos matemáticos en la solución de problemas, creando nuevos algoritmos.

1.7.5 Competencia contrastativa

Gracias a esta competencia el alumno está en condiciones de determinar el alcance teórico o práctico de lo aprendido. Lo primero conserva la coherencia con el discurso; lo segundo, su funcionalidad o contrastación.

Indicadores de logro

1) Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.
2) Dada una fórmula o un modelo es capaz de examinar su validez para casos particulares.

1.7.6 Competencia Argumentativa

El alumno aduce razones para fundamentar sus proposiciones. Harán parte de su vocabulario expresiones como: implica, equivale, demuestra, etc.

Indicadores de logro

1) Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones.
2) Dice por qué usa una determinada estrategia para resolver algún problema.

1.7.7 Competencia Demostrativa

Acá el alumno es capaz de formalizar las explicaciones matemáticas atinentes a enunciados o teoremas.

Indicadores de logro

1) Aplicar procesos lógicos para obtener respuestas.
2) Descubre casos particulares de alguna fórmula o modelo.

1.8 El aprendizaje significativo

Se tiene en cuenta que la tradición cultural ha impuesto a la mayoría de la población, una cierta *visión* de lo matemático, centrada en las formas rígidas y definitivas de sus constructos. Es así como se da prioridad al conocimiento de fórmulas y algoritmos para resolver problemas, olvidando, muchas veces, los métodos de construcción conceptual para los significantes y significados, originándose un cierto estado mental con lo matemático, desfasado de las posibilidades reales de los sujetos, y no de producir en el estudiante una comprensión clara de los conceptos; al hablar de comprensión, se quiere decir que el alumno le dé sentido a aquello con lo que entra en contacto y mediante lo cual se forman representaciones y esquemas cognitivos. Se trata, pues, de una asimilación activa, consistente en captar o adquirir lo que está

implicado en el proceso de aprendizaje, según Ontoria[7] “la teoría de la asimilación es el p□nto central del planteamiento de A□s□bel sobre el aprendizaje significativo, de tal manera q□e la mayor parte de este aprendizaje consiste en la asimilación de la n□eva información", como ya es sabido la estr□ct□ra cognitiva de □n est□diante es el factor más importante q□e infl□ye en el proceso de adq□isición o no de □n n□evo concepto, y es en este proceso donde se modifican la estr□ct□ra cognitiva y la n□eva información, esta interacción constit□ye el núcleo de la teoría de la asimilación.

De ac□erdo con A□s□bel[8], la adq□isición de información n□eva depende en alto grado de las ideas pertinentes q□e ya existen en la estr□ct□ra cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres h□manos oc□rre a través de □na interacción de la n□eva información con ideas pertinentes q□e existen en la estr□ct□ra cognitiva. El res□ltado de la intención q□e tiene l□gar entre el n□evo material q□e se va a aprender y la estr□ct□ra cognitiva existente constit□ye □na asimilación de significados n□evos y antig□os para formar □na estr□ct□ra cognitiva altamente diferenciada.

La teoría del aprendizaje significativo, como ya se ha dicho, f□e concebida por David A□s□bel, con la intención de s□perar tanto los límites de la enseñanza tradicional, memorística y ac□m□lativa, como el exceso de actividad q□e se derivaba de las corrientes a favor del aprendizaje por desc□brimiento, el c□al impedía en ocasiones la asimilación de n□evos contenidos. Este se presenta, según Maya[9], ”c□ando n□evos conocimientos pasan a significar algo para el est□diante, siendo capaz de integrar y explicitar dicho conocimiento, es decir, si explica alg□nas sit□aciones con s□s propias palabras y emplea este conocimiento para la resol□ción e interpretación de n□evos problemas en distintos contextos”.

En síntesis, el aprendizaje significativo es el proceso q□e se genera en la mente h□mana c□ando obtiene n□evas informaciones de manera no arbitraria y s□stantiva, y q□e según Rodríg□ez Palmero “req□iere como condiciones, predisposición para aprender y material potencialmente significativo q□e, a s□ vez, implica significatividad lógica de dicho material y la presencia de ideas de anclaje en la estr□ct□ra cognitiva del q□e aprende”. Es s□byacente a la integración constr□ctiva de pensar, hacer y sentir, lo q□e constit□ye el eje f□ndamental del engrandecimiento h□mano. Es □na interacción tríadica entre profesor, aprendiz y materiales ed□cativos del c□rríc□lo en la

---

[7] ONTORIA PEÑA, Antonio et al. Mapas Conceptuales. Una técnica para aprender. Madrid: Narcea, 1999. P. 22.

[8] AUSUBEL, D. et al Psicología Educativa. México: Trillas, 1991. P. 70-71.

[9] MAYA, Arnobio, DÍAZ, Nohora. Mapas Conceptuales, elaboración y aplicación. Bogotá D. C: Retina, 2002, p.21.

que se delimitan las responsabilidades correspondientes a cada uno de los protagonistas del evento educativo. Es una idea subyacente a diferentes teorías y planteamientos psicológicos y pedagógicos que ha resultado ser más integradora y eficaz en su aplicación a contextos naturales de aula, favoreciendo pautas concretas que lo facilitan. Es, también, la forma de encarar la velocidad vertiginosa con la que se desarrolla la sociedad de la información, posibilitando elementos y referentes claros que permitan el cuestionamiento y la toma de decisiones necesarios para hacerle frente a la misma de una manera crítica. Pero, estas no son las únicas condiciones que pueden ayudarnos a referirnos al aprendizaje significativo, y además, son pocas las técnicas que están constituidas para cumplir con dicho propósito.

1.9 Los mapas conceptuales

Mediante el lenguaje común las personas aducen y argumentan para validar sus creencias o concepciones; desde este punto de vista, la técnica de mapa conceptual es una perspectiva de trabajo teórico-experimental de gran atención para profesores, investigadores educativos, psicólogos y alumnos en general, esta técnica se desarrolló a partir de la década del setenta.

Los mapas conceptuales surgen como una forma de instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, en especial, en lo referente a la evolución de las ideas previas que poseen los alumnos; fueron desarrollados por J. D. Novak, y divulgados a través del libro *Aprendiendo a Aprender*, en el cual, según Novak[10] , ..”se pretendía entre otros, un objetivo medular; liberar el potencial de aprendizaje en los alumnos que permanece sin desarrollar y que en muchas prácticas educativas lo único que hacen es obstaculizarlo más que facilitarlo. Así mismo, Novak plantea que los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones y que una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica, además, los define como un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones".

Es por eso, que los mapas conceptuales son un instrumento que facilita la evaluación formativa del alumno y como instrumentos evaluativos son útiles en la detección de errores conceptuales y en la expresión de la evolución, a lo largo del proceso educativo.

---

[10] NOVAK, Joseph, GOWIN, Bob. Aprendiendo a aprender. Martínez Roca, 1999. P.24.

La técnica puede ser empleada como herramienta para el aprendizaje ya que permite al docente explorar con sus alumnos los conocimientos previos que tienen frente a un tema especifico, además, su elaboración, le permite al alumno organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento del concepto estudiado, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.

Además de ser una técnica de estudio, los mapas conceptuales también pueden ser empleados como una representación gráfica o esquemática del conocimiento, en este esquema todo el conocimiento está organizado y representado en todos los niveles de abstracción, situando, según Novak, “los más generales e inclusivos en la parte superior del mapa y los menos inclusivos en la parte inferior del mismo". Esta manera gráfica de representar los conceptos y sus relaciones, proveen a los profesores y alumnos de una forma para organizar y comunicar su estructura mental sobre un tema determinado. Ausubel, citado por Maya, sostiene que “la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención", por lo tanto, un concepto podrá o no, ser incorporado de acuerdo a la estructura cognitiva que el alumno posea y a las tareas de aprendizaje que se le presenten.

Desde una perspectiva innovadora e investigativa, los mapas conceptuales son una fuente de información del lenguaje que posee un alumno, permitiendo al docente regular el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde el alumno puede manifestar y comunicar lo que piensa de la forma más clara posible.

1.10 Los mapas conceptuales y la competencia comunicativa.

El propugnar por la evolución del lenguaje de los alumnos, debe ser uno de los objetivos primordiales en las actividades de aprendizaje diseñadas por el docente, pues esto le permite una mejor interacción con sus alumnos, ya que si hay limitaciones en el lenguaje, se generan dificultades para comprender, analizar y razonar frente al área de estudio; dichas dificultades, se tornan aún más graves, si a lo anteriormente expuesto se le agrega la poca habilidad que puede tener el estudiante en el uso y comprensión del lenguaje utilizado. Esto trae como consecuencia fallas al comunicar en el lenguaje matemático, no permitiendo al docente hacer una interpretación objetiva de lo que realmente piensa el estudiante pues es bien sabido del desfase que hay entre lo que un estudiante piensa y lo que comunica.

Los mapas conceptuales son una herramienta para representar conceptos y relaciones entre ellos y aunque existen otras formas de representación de conceptos es la única que está basada en la teoría de aprendizaje significativo. Su aplicación, es entonces una fuente de información del lenguaje para el docente que permite representar las nuevas relaciones que ha adquirido y la forma de cómo el lenguaje se ha cualificado.

Con la técnica de los mapas conceptuales, los estudiantes comunicarán con claridad las proposiciones, que va adquiriendo y la forma como se va ampliando su nueva red de relaciones, esto implicará el desarrollo de la competencia comunicativa, pues el estudiante será capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representación en la interpretación, conservando en ellos la estructura lógica.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es ampliamente reconocido el problema de la calidad de la educación Colombiana, fundamentalmente la falta de adecuación a las posibilidades individuales y a las nuevas condiciones de la sociedad mundial y la nacional en particular. En el nivel superior de educación, las instituciones reciben los efectos de una formación básica deficiente, no sólo en cuanto a la cultura necesaria sino, también, y esto es lo más grave, en lo relacionado con el estado de las competencias para aprender, colectiva e individualmente.

La situación anterior, identificada en el caso particular de la formación en competencias matemáticas, ha llegado a un punto crítico, donde las instituciones formadoras de profesionales han tenido que optar por ofrecer, ellas mismas, la formación necesaria para desarrollar sus programas respectivos; sin embargo, son muchos los obstáculos y muy complejas las variables requeridas para que este proceso pueda ser exitoso.

Desde hace muchos años se vienen orientando, en la Universidad de Medellín, una serie de asignaturas que con los nombres de *matemáticas básicas*, *operativas* o *generales,* pretenden dar una respuesta adecuada al déficit detectado; pero, un análisis objetivo obliga a reconocer el fracaso de estas estrategias cuando se piensa en la mayoría de los estudiantes, más del 80% en muchos casos, que están tocados por este problema. En particular, una de las dificultades con las que se encuentran los estudiantes, cuando inician su tránsito por la educación superior, es con las asignaturas que tienen que ver con su formación básica en matemáticas, ello obedece en gran parte al poco interés que muchos estudiantes muestran por la disciplina o porque la educación recibida hasta el momento, no les ha dado la posibilidad de incorporarlas a su cultura.

El Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín ha empezado a intervenir esta problemática, para ayudar a fortalecer las competencias y la formación matemática de los estudiantes matriculados en los primeros semestres de los programas adscritos a las facultades de Ciencias Económicas y Administrativas e Ingenierías, en el marco de la renovación curricular, buscando bajar *los índices de deserción y perdida académica*, que según informes del jefe del Departamento son altos y, lo más preocupante, con leve tendencia a incrementarse. Lo anterior motiva,

aplicar modelos de situaciones problema que ofrezcan nuevas alternativas para el aprendizaje y permitan la movilización e identificación de competencias.

2.1 Problema de Investigación

El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas no es solo saber cuáles son los conocimientos a enseñar y de qué manera exponerlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrenta la mayoría de los estudiantes. Este segundo aspecto es tan importante como el primero, puesto que asume que la enseñanza de las matemáticas ha de contribuir al desarrollo general de las capacidades de razonamiento, de análisis y de visualización de los alumnos. Tradicionalmente, cuando se desarrolla un curso de matemáticas operativas, se hace énfasis en la manipulación de ecuaciones y de sustitución de valores dentro de ellas, no considerando la matemática como una herramienta que permite el desarrollo y la evaluación de ciertas competencias; sin embargo, la manipulación de ecuaciones y sustitución de valores siguen siendo importantes en el estudio de las matemáticas, ya que mediante ellos se puede alcanzar suficiente destreza operacional, pero poco aportan al desarrollo del razonamiento de los alumnos.

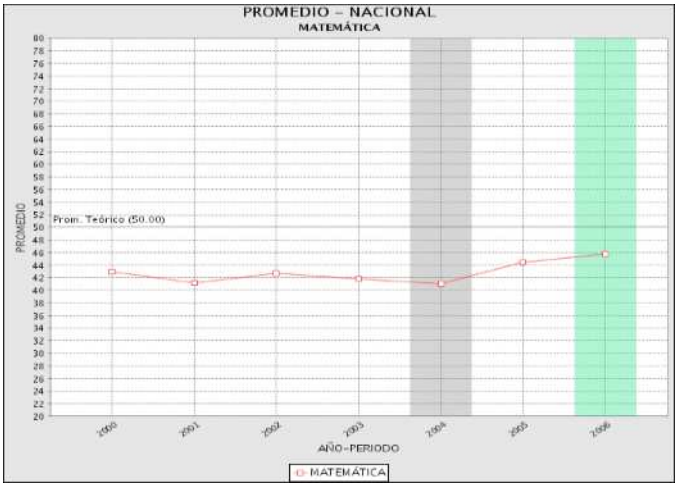
Lo anterior cuestiona la metodología tradicional, evidenciando un grave problema metodológico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, trayendo como consecuencia las siguientes situaciones:

2.1.1 El bajo desempeño de los estudiantes de último grado de bachillerato

La tabla siguiente presenta los resultados dados por el Instituto de Fomento de la Educación Superior –ICFES-[11] estos resultados, aunque han mejorado en los dos años, evidencian un bajo rendimiento académico de los estudiantes colombianos, pues no logran alcanzar el promedio teórico esperado de 50 puntos.

[11] Véase, http://www.icfesinteractivo.gov.co/historicos/ Informe de resultados históricos.

A nivel nacional



NIVEL

AGRUPAMIENTO: NACIONAL

AÑO(S): 2000 – 2006

PRUEBA: MATEMÁTICA

2000	42,98 puntos
2001	41,14 puntos
2002	42,64 puntos
2003	41,77 puntos
2004	41,04 puntos
2005	44,44 puntos
2006	45,75 puntos

En la tabla que sigue se describe los resultados por niveles de competencia obtenidos por los estudiantes a nivel nacional en el año 2006 y se presentan las diferentes competencias que son evaluadas en esta prueba y, frente a cada una de ellas, los distintos niveles en los cuales se han distribuido los resultados de los estudiantes.

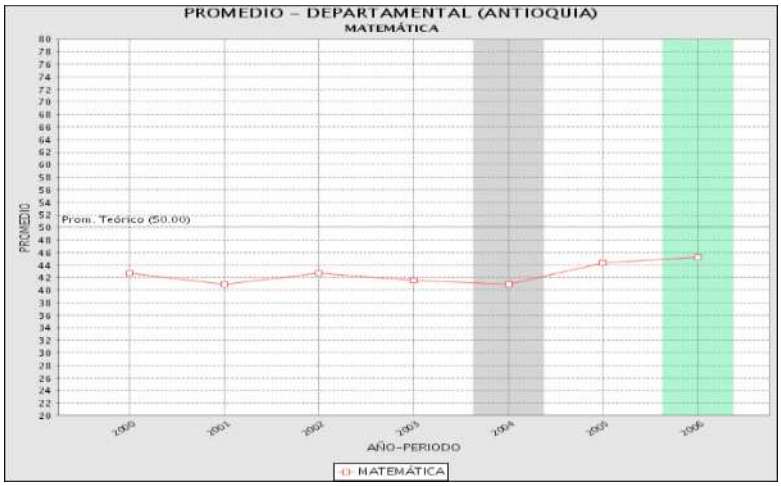
Este informe evidencia que más del 90% de los estudiantes se encuentran ubicados en los niveles medio y bajo:

Nivel	Matemática		
	C1 Comunicación	C2 Razonamiento	C3 Solución de problemas
I (Bajo)	46.62	42.06	55.82
II (Medio)	40.13	51.13	38.33
III (Alto)	11.94	5.51	4.54

Es importante resaltar que la competencia con mayor porcentaje en el nivel alto es la Comunicativa.

A nivel local

En Antioquia los resultados no son muy alentadores en los últimos seis años, pues como se muestra en la tabla siguiente el promedio de los resultados obtenidos sigue siendo muy bajo, está por debajo del promedio teórico, es decir, es inferior al 50 % de los puntos.



2.1.2 Deserción en los primeros semestres universitarios

La deserción es un problema inherente a la vida universitaria, que permanecerá aún si se cambian las políticas de las instituciones universitarias, pues el bajo rendimiento académico presentado por los estudiantes, en especial en el área de matemáticas y la deserción de los mismos en los cursos de matemáticas básicas, que se ofrecen en los primeros semestres de las diferentes universidades[12] , se producen por diversas situaciones que van desde los procesos externos al ámbito educativo o institucional dónde el estudiante realiza su formación, entre ellos se encuentra la falta de recursos didácticos, hasta las referidas al terreno propio de los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, donde se puede relacionar, la calidad educativa, la estructura y pertinencia curricular del área dentro del saber específico y la falta de una adecuada capacitación docente, que se refleja en la débil elaboración de experiencias de aprendizaje, que ayuden a los alumnos a mejorar su nivel de razonamiento, entre otras.

Según, *Estudio de la deserción en la educación superior en Colombia*, algunos de los factores externos que movilizan la deserción, son:

- Ambiente familiar
- Ambientes educativos.
- Trayectoria educativa y acompañamiento al estudiante en su formación.
- Edad.
- Adaptación social del estudiante con sus pares u homólogos.
- Faltos niveles de comprensión, desinterés y apatía.
- Modelos pedagógicos diferentes a los del bachillerato.
- Programas curriculares rígidos, de alta intensidad temática y tiempos reducidos.
- Evaluaciones extenuantes y avasalladoras.
- Cursos no asociados ni aplicables al desarrollo profesional.
- Factores económicos.
- Cantidad de oferentes en el mercado de la educación.
- La orientación profesional y vocacional por parte de los docentes.

[12] Según entrevistas con jefes de departamentos y vicedecanos de diferentes universidades, públicas y privadas, sostienen que en promedio la tasa de deserción de los cursos de cálculo y matemáticas básicas, alcanza y en algunos casos supera el 60%. Ellos consideran como deserción, la cancelación de cursos, cancelaciones de semestre y desertores académicos.

De todas formas la deserción estudiantil universitaria es un fenómeno universal. Contrario a las pretensiones normales que puede tener cualquier institución educativa, no todos los estudiantes que inician su proceso académico lo terminan, lo que implica que sólo una pequeña minoría logre cumplir todos los requisitos académicos y disciplinarios que los acredita para optar al título profesional al cual se inscribieron. La realidad es que en todas las universidades del mundo hay estudiantes que van desertando, por unos u otros factores; algunos de ellos, producen abandono no voluntario y otros voluntarios, y además el estudio de cada uno de estos factores puede ser desarrollado en proyectos de investigación de gran importancia.

Este fenómeno es considerado como normal en casi todas las universidades del mundo, y por lo tanto, no siempre es objeto de estudio ni de atención por parte de directivos y de académicos. Algo que deja un sin sabor, después de toda la lucha que el estudiante hace para obtener el ingreso; pues se someten a exámenes, entrevistas y realizan pagos de derechos, papelería,... y otros requisitos dependiendo de la universidad.

Lo anterior genera una serie de inquietudes como por ejemplo: ¿por qué algunos de los estudiantes matriculados en un programa académico no terminan sus estudios? ¿por qué los estudiantes toman la determinación de abandonar la universidad o el programa por el cual han luchado, después de haberse sometido a difíciles pruebas y realizado esfuerzos económicos? Es tal vez, esta última situación, la que influye en el aumento de los índices de deserción, pues los alumnos no reciben la cantidad de experiencias de aprendizaje necesarias para comprender y aprender significativamente los conceptos involucrados en el estudio de esta rama del saber.

Lo anterior evidencia el problema que existe en la docencia que se imparte en esta disciplina, y revelan la dificultades que tienen los alumnos, no solo para aprobar las asignaturas que corresponden a dicha área, sino para comprender los razonamientos propios de la misma, que son precisamente aquéllos que les permiten organizar, interrelacionar y fijar el conocimiento adquirido, fomentando la reflexión, el análisis y la creatividad.

La Universidad de Medellín no es un caso de excepción y la problemática antes planteada está presente en la Institución; por eso si no hay una solución efectiva a una situación largamente discutida, entonces hay que emprender acciones que den salida al problema, sino en general, al menos a nivel institucional donde los estudiantes

muestren una cultura diferente en algunos aspectos al de otras universidades de la región.

2.2 Problema Objeto de la investigación

Cuáles son las competencias que se desarrollan al aplicar un modelo de situaciones problema en los estudiantes del segundo semestre, en dos grupos del curso Algebra y trigonometría, adscritos al Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín

3 METODOLOGÍA

El presente trabajo de investigación propone la aplicación de un modelo de situaciones problema que aporta experiencias de aprendizaje a los estudiantes, para que se produzca un desarrollo en las competencias categorizadas.

En este capítulo, se presentan los objetivos y fases que delimitan el trabajo de investigación y las situaciones problema con sus respectivas evaluaciones y formatos con los indicadores de logro para cada competencia.

3.1 Objetivo general

Determinar las competencias que se desarrollan en los estudiantes del segundo semestre con base en la aplicación de un modelo de situaciones problema, en dos grupos del curso de Álgebra y Trigonometría, adscritos al Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín.

3.2 Objetivos específicos

1) Seleccionar situaciones problema adecuadas con base en el modelo establecido para iniciar el acompañamiento a los estudiantes, en las asignaturas antes mencionadas.

2) Diseñar nuevas situaciones problema como alternativa de complemento a las seleccionadas y que se ajusten al desarrollo de los contenidos.

3) Aplicar las situaciones problema establecidas a dos grupos matriculados en el segundo semestre del 2006 del Departamento de Ciencias Básicas, que aborden el curso de Álgebra y Trigonometría.

4) Procesar la información obtenida de acuerdo a la evaluación de las competencias en cada una de las situaciones problema.

5) Interpretar los resultados obtenidos a partir de los cambios y las exigencias didácticas y confrontarlos con los grupos que no participaron en este proceso desarrollando los mismos contenidos.

6) Analizar mediante un paquete estadístico las variables que intervinieron en el proceso.

3.3 Investigación cualitativa

La investigación se desarrolló dentro de los postulados de la investigación cualitativa, que tiene como una de sus características fundamentales, el concepto de lo social, como una realidad construida regida por las leyes sociales que permite comprender la influencia representada en las diferentes experiencias sociales y culturales, en el significado histórico del desarrollo de las personas y el valor que éste representa sobre la existencia de los individuos, las culturas ó los colectivos.

Lo anterior se fundamenta en las afirmaciones de Piaget J.(1988) acerca de que los actores sociales que han creado su propia historia, pueden también reflexionar sobre si mismos y sobre su situación, y transformar ó cambiar su realidad.

Lo humano se investiga desde los tres espacios de un desarrollo simultáneo: el intrasubjetivo ó espacio de lo más privadamente individual, el intersubjetivo o espacio vincular y el transubjetivo o espacio social y cultural. Al complejo campo de inserción e interacción de estos tres espacios, no se accede a través de parámetros y escalas de valores absolutos, sino a través de la interpretación cualitativa de la amplia y siempre presente internalización del mundo y sus concepciones, entretejido de fantasía y deseos de adaptación a la realidad y en equilibrio con la vida interior.

3.3.1 Población

Estudiantes de los programas adscritos a las Facultades de Ingeniería y Ciencias Económico – Administrativas de la Universidad de Medellín, oficialmente matriculados y que a su vez estén cursando la asignatura de Álgebra y Trigonometría en el segundo semestre del año 2006.

3.3.2 Muestra

Como resultado de la convocatoria se conformaron dos grupos, cada uno de al menos 25 estudiantes de la asignatura Álgebra y Trigonometría, con el objetivo de iniciar el desarrollo del proyecto a partir del segundo semestre del año 2006.

3.3.3 Unidad de Análisis

La aplicación del modelo de situaciones problema en el aula a estudiantes se los grupos legalmente constituidos para la realización del proyecto en el segundo semestre del año 2006 y con continuidad al primer semestre del año 2007.

3.4 Fases de la Investigación

La investigación se desarrolló en tres fases. La primera estuvo directamente relacionada con el estudio de documentos referenciados, y la elaboración y complementación de situaciones problema. En la segunda fase hubo oportunidad de aplicar los objetivos de desarrollo experimentales en el proceso. La tercera mostró el soporte estadístico de los resultados parciales y totales del proyecto, según el propósito de investigación, evaluados de acuerdo con los parámetros establecidos en la Institución y a la luz del marco teórico.

Primera Fase. Estudio de documentos. En el contexto bibliográfico presentado por el profesor Orlando Mesa B. y complementado con experiencias de otros autores, se pudo analizar, discutir y realizar propuestas que llevaron a perfeccionar el tema en estudio; construcción de las categorías e indicadores previos que permitieron la recuperación de las experiencias y elaboración de los instrumentos para la identificación de la información significativa: charlas, experiencias, discusiones, entre otros. (Ver anexo. Las grabaciones de las reuniones realizadas entre investigadores y coinvestigadores).

Segunda Fase. Las situaciones problema a ejecutar durante el desarrollo del proyecto, mostraron las bondades de este en su aplicación, a través de un control permanente que facilitó correctivos inmediatos. (Ver anexo).

Tercera Fase. Con la evaluación y presentación, justo a tiempo, de los resultados, según propósito de la investigación, la operación establecida en el desarrollo del proyecto tuvo un control permanente, proporcionando todo el valor agregado en el mejoramiento continuo necesario para unos resultados óptimos.

3.4.1 Desarrollo de la segunda fase

Una vez se inician las labores académicas en este periodo, el primer día de clase, se abre una convocatoria, para estudiantes repitentes de primer semestre que querían vivir un proceso formativo paralelo al tradicional, la convocatoria sólo necesitó de un día para obtener los estudiantes requeridos en este *grupo experimental,* el otro se seleccionó al azar y con un profesor titular nombrado para éste. Los dos *grupos experimentales* contarían con el apoyo irrestricto de todos los investigadores y coinvestigadores matriculados en el proyecto, en especial para el manejo de las sesiones de clase, asesorías, y orientación en el desarrollo de aplicaciones y manejo de algoritmos.

En el segundo día de clase y conocidas las listas definitivas de cada *grupo experimental*, el inicio consistió en socializar las normas y parámetros establecidos para ambos cursos, teniendo en cuenta que en el grupo elegido al azar se permitió que cada estudiante decidiera si permanecía o no en él; sólo tres estudiantes solicitaron el cambio, y este fue facilitado en forma inmediata por el Jefe del Departamento de Ciencias Básicas. El grupo de repitentes inició con veinte y cinco (25) estudiantes, el grupo seleccionado al azar inició con veinte y ocho (28).

Las principales normas:

1) No hay texto guía como en los otros grupos del primer semestre, donde el micro-currículo está contenido en el texto, *Matemáticas Previas al Cálculo*, el cual debe ser desarrollado en forma completa. En los dos *grupos experimentales***,** las guías para el cumplimiento del micro fueron elaboradas por los mismos investigadores participantes en el desarrollo del proyecto, con base en situaciones problema y con un contenido que no desfiguraba para nada el diseño micro-curricular establecido por el Departamento de Ciencias Básicas para los estudiantes del primer semestre de la Universidad.

Estas guías se elaboraron con base en las competencias establecidas para cada tema a tratar y teniendo en cuenta un lenguaje más amigable y motivacional para con el estudiante. (Ver anexo guías). Este material es obligatorio para cada estudiante y se debe tener leídas las primeras páginas al iniciar la segunda sesión de clase, donde el profesor que haría las veces de tutor, entraría a resolver y aclarar dudas en forma individual o colectiva según lo amerite el momento.

2) El trabajo no solo es realizado en clase, todos los estudiantes entrarán a aplicar una disciplina académica más estricta que en un curso regular, teniendo en cuenta que el Trabajo Independiente entra a jugar el papel más importante de todo el proceso.

3) El control al Trabajo Independiente de cada estudiante se hará en forma personalizada, por lo cual los grupos máximo, permiten los cupos establecidos.

4) Las evaluaciones son de tipo cualitativo, bajo un formato elaborado para cada prueba, midiendo en ellas objetivos de logros establecidos con una rigurosidad necesaria, para la adquisición de competencias trazadas en cada guía. Es importante aclarar que no se descarta la evaluación cuantitativa; para tal efecto, se elaboró un formato que permitiera al profesor poder convertir la evaluación cualitativa en una cuantitativa en el momento apropiado o requerido. (Ver anexo de formatos de evaluación).

5) Cada vez que se realice y evalúe una prueba esta es registrada y se facilita el resultado al estudiante dándoselo en forma personalizada, se hace luego la realimentación explicando en cada caso, los logros adquiridos en forma total, parcial, o no logrado, posteriormente se recoge el material y es llevado a una carpeta individual, donde se acumula la vida académica de cada estudiante durante el semestre. (Ver anexo de carpetas individuales).

6) Cuando el resultado de un logro no es total (sólo parcial o no se logra), hay oportunidad de comprobar la adquisición del logro en un tiempo prudente, para cumplir con la competencia establecida. Para ello se plantean ejercicios complementarios con la bibliografía del texto guía en los grupos regulares, que deben ser realizados y sustentados en forma individual ante la presencia de los compañeros del grupo o en forma privada, todo esto queda registrado en cada carpeta.

En esta asignatura es muy probable la adquisición de competencias a medida que se avanza en el desarrollo de los temas, bajo parámetros establecidos en la evaluación de logros y los cuales pueden quedar aplazados o parcialmente aprobados, por eso la rigurosidad en la elaboración de evaluaciones.

7) No se pasan resultados de evaluaciones al sistema regular que posee la Universidad, sólo una semana antes del examen final, se da a conocer el setenta porciento (70%) oficial al estudiante, en todo el semestre él puede controlar sus resultados y saber cómo va de tal manera que si ve la necesidad de cancelar la asignatura no tenga ningún tropiezo, según el reglamento estudiantil establecido.

8) Las pruebas Institucionales programadas por el Departamento de Ciencias Básicas en los grupos regulares para el examen parcial y final, se realizan en la misma fecha para los dos grupos experimentales, más no a la misma hora (mínimo 8 horas de diferencia), para dar oportunidad a los estudiantes del proyecto de poder medir la adquisición de habilidades y destrezas con los estudiantes de los grupos regulares, si voluntariamente lo quieren. En caso de obtener un mejor resultado en el examen final de los grupos regulares, ésta le será reconocida para su treinta por ciento (30%) definitivo.

9) Al final del semestre se hace un estudio de cada alumno para realizar su promoción o no, según los resultados y teniendo en cuenta muy especialmente el cumplimiento de las competencias básicas, necesarias y suficientes para cursar el cálculo Diferencial que es el curso siguiente.

10) La asistencia tendrá un control estricto bajo el reglamento estudiantil, con la rigurosidad del trabajo independiente, monitoreado y evaluado en cada sesión de clase.

11) El trabajo en equipo será responsabilidad de cada uno, en este, todos deben estar en capacidad de responder a las sustentaciones exigidas en el momento y que se hacen necesarias para este tipo de procesos, donde al trabajar en equipo, se busca más una disciplina de estudio y el compartir experiencias con otros estudiantes, bajo la premisa de intereses colectivos y no individuales.

12) Durante todo el desarrollo del proyecto se mantiene un control estadístico, para cada estudiante, el cual permite en la socialización final, tener un soporte escrito que sustenta, la promoción del estudiante o el aplazamiento del mismo. Cuando se presente aplazamiento, el estudiante tiene derecho a presentar una nueva prueba escrita con los temas tratados durante todo el proceso.

De las normas anteriores se hizo un análisis con los estudiantes de los dos grupos experimentales, se resolvieron las dudas planteadas, y fue así como se dio inicio al proceso.

El proyecto se desarrolló exitosamente durante el semestre, cumpliéndose con todo lo pactado, además de tener entre los investigadores y coinvestigadores un contacto permanente, aparte de las reuniones previamente programadas, para discutir, analizar y evaluar la evolución del proyecto.

Al final del semestre se hizo la socialización donde participó el grupo investigador en pleno, además de una nutrida participación de los estudiantes de los grupos experimentales (ver anexo de grabación). Todas las bondades del proyecto y sus desaciertos se han tenido en cuenta, para ajustar los resultados hacia nuevas experiencias con cohortes que lo demandan; inclusive en el momento (semestre uno de 2007) se viene trabajando con dos grupos de Álgebra y trigonometría con esta nueva estrategia de aprendizaje, en el Departamento de Ciencias Básicas.

3.5 Diseño metodológico

Las actividades y experiencias de aprendizaje, pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula, sino como aquellas que promueven aprendizajes significativos, independiente del contexto donde se realicen; estas se deben enfocar de tal manera que permita a los alumnos participar en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que dichas experiencias sean aquellas que se realicen con propósitos formativos, permitiendo al alumno el desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes para que pueda establecer relaciones válidas entre los conocimientos adquiridos y otras áreas del saber.

A continuación se hace la descripción de una situación problema, donde se mencionan todos los pasos para su planteamiento, aplicada a los estudiantes pertenecientes a los grupos experimentales; en ella se aprecia un proceso lógico que facilita el estudio y aprendizaje de la *trigo□ometría*, último tema del microcurrículo establecido en este primer nivel.

Considerando el proceso a seguir para el planteamiento de una situación problema se tiene.

1. <u>Definición de una red conceptual</u>. En este caso la red conceptual hace referencia a la TRIGONOMETRÍA.

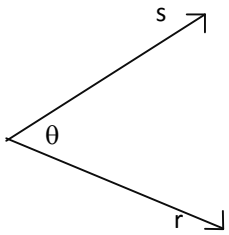
*3.6 **SITUACIÓN PROBLEMA** 4: TRIGONOMETRÍA*

La trigonometría es una de las ramas más versátiles. En los tiempos modernos se ha aplicado en campos diversos tanto en su forma teórica como práctica, especialmente en procesamiento de señales en la industria telefónica, en la codificación de música de discos compactos, el diseño de sistemas de navegación, la producción de rastreos para uso médico, la extensión de redes para los sistemas de información y la aplicación de los mismos. Es una herramienta indispensable para los ingenieros, físicos, científicos de la computación, matemáticos, en general para todas las ciencias. El poder y la versatilidad de la trigonometría proviene del hecho que puede considerarse de dos maneras diferentes: La primera como el estudio de funciones de números reales, y la segunda como funciones de ángulos. En ambos casos tiene aplicaciones como procesos dinámicos en el movimiento armónico simple, el estudio de las ondas sonoras y la descripción de otros fenómenos periódicos, también puede concurrir a aplicaciones estáticas, medición de distancias, fuerza, velocidad y en general aplicaciones que comprenden la medición de longitudes y direcciones.

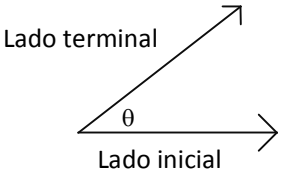
En primera opción se presentan las funciones trigonométricas como funciones de ángulos, es decir funciones que asocian a cada ángulo un número real. Por ejemplo la función seno se define como una norma que asigna a cada ángulo θ un número real *seno* θ. Como la medida del ángulo θ es un número real, podemos estudiar las funciones trigonométricas de los ángulos como funciones de números reales, con lo anterior estamos mostrando que la trigonometría se estudia de dos maneras diferentes, ya que aplicaciones diferentes asumen funciones de una manera diferente. Por ejemplo cuando aplicamos las funciones trigonométricas al estudio del movimiento armónico debemos considerarlas como funciones de tiempo, que es un número real. Por otra parte en muchas aplicaciones es forzoso considerarlas como funciones de ángulos, por ejemplo para conocer distancias, en algunos casos se necesita primero del ángulo formado por dos objetos y conociendo alguna distancia a un tercer objeto, con el conocimiento de las funciones trigonométricas de los ángulos, podemos resolver este dilema.

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

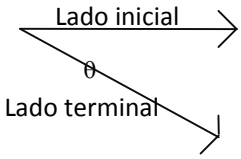
Un *ángulo* θ es un conjunto de puntos que contiene un punto P y dos *rayos* que se extienden desde P. El punto P es el *vértice* del ángulo y los rayos son los lados del ángulo. El rayo *r*, se llama el *lado inicial* (permanece fijo) y el segundo rayo, rayo *s*, se llama *lado Terminal* del ángulo. El ángulo comienza en la posición del lado inicial y gira alrededor del punto final común P en un plano hasta que alcanza su posición Terminal.



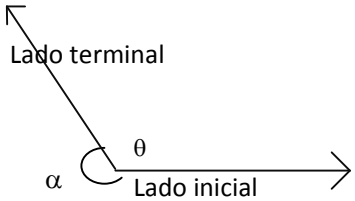
Una rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj produce un *ángulo positivo* y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un *ángulo negativo*. El tamaño de la rotación en cualquier dirección no está limitado. Dos ángulos diferentes pueden tener los mismos lados iníciales y terminales, estos ángulos se llaman *ángulos coterminales*.



θ ángulo positivo



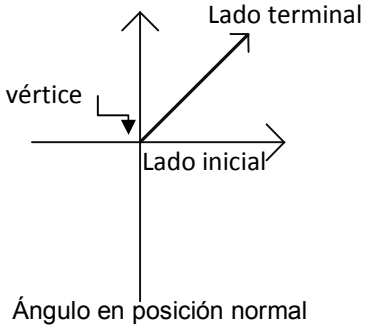
θ ángulo negativo



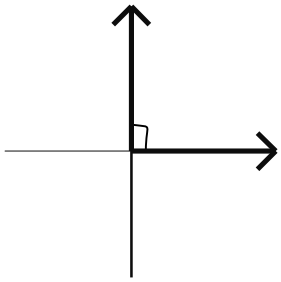
α y β ángulos coterminales

Nota: β ángulo positivo, α ángulo negativo

Un ángulo en un sistema de coordenadas rectangular está en la *posición normal o estándar* si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo x. Si el lado terminal de un ángulo que está en la posición normal yace sobre un eje coordenado se dice que es un *ángulo cuadrantal*. Observa la ilustración a continuación.



Ángulo en posición normal



Ángulo cuadrantal

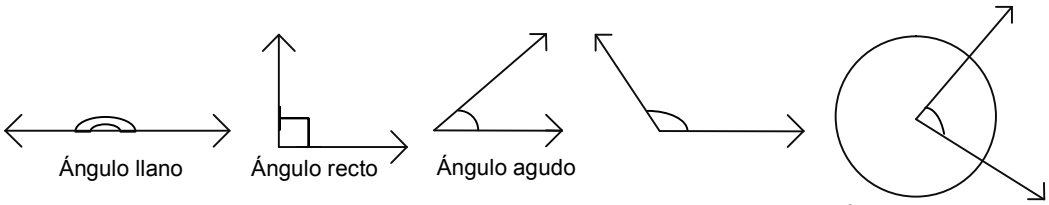
Así como los segmentos se miden en pulgadas, centímetros o pies, los ángulos se miden comúnmente en *grados* o *radianes.*

Definición. Medición en grados

Un ángulo formado por la rotación completa tiene una medida de 360 grados (360^0). Un ángulo formado por 1/360 de una rotación completa tiene una medida de 1 grado (1^0). El símbolo "^{0}" denota grados.

Definiciones

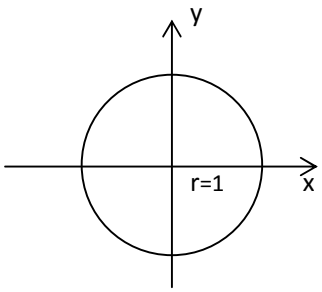
Un *ángulo llano* es un ángulo que mide 180^0. Un *ángulo recto* es un ángulo que mide 90^0. Un *ángulo agudo* es un ángulo que mide menos de 90^0. Un *ángulo obtuso* es un ángulo que mide mayor de 90^0 pero menor que 180^0. Un *ángulo central* es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo y cuyos lados son radios del círculo.



Dos ángulos positivos son *complementarios* si su suma es 90^0. Dos ángulos son *suplementarios* si su suma es 180^0.

Nota: Los ángulos que miden 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 y 360^0 son ángulos cuadrantales (ángulos donde el lado Terminal yace sobre los ejes x ó y).

CÍRCULO UNITARIO



Es un círculo de radio uno centrado en el origen del plano x,y su ecuación está dada por $x^2 + y^2 = 1$

Medida de ángulos

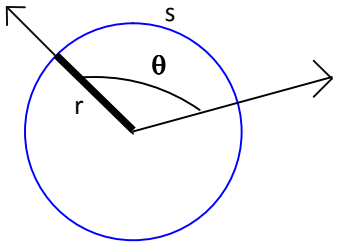
Grados sexagesimales(DEG) 1º=60'=3600" La circunferencia está dividida en 360º

Radianes (RAD) 360º = 2π radianes.

Definición. Medición en radianes

Si el vértice de un ángulo θ está en el centro de un círculo de radio r > 0, y la longitud del arco opuesto a θ en la circunferencia es *s*, entonces θ medido en radianes está dado por:

$$\theta = \frac{s}{r}\ radianes$$



Un radián es el tamaño del ángulo central de un círculo que intersecta un arco de la misma longitud que el radio del círculo. Observa que *s* y *r* deben estar medidas en las mismas unidades. Además, θ se usa de dos maneras: para nombrar el ángulo y como medida del ángulo.

Nota: La medida en radián es un número sin unidades, pues las unidades en que se miden la longitud del arco y el radio se eliminan, por tanto, queda un número sin unidades.

Conversión entre grados y radianes

Conversión de grados a radianes y de radianes a grados está basado en que:

$$180\ grados = \pi\ \ radianes$$

Para cambiar *radianes a grados* y *grados a radianes* usamos las siguientes fórmulas:

Radianes a grados	Grados a radianes
$\frac{180^0}{\pi}\theta$	$\frac{\pi}{180^0}\theta$

Ejemplos para discusión:

1) Cambia de radianes a grado:

$a)\ 5\ radianes$

$b)\ \frac{7}{6}\pi$

$c)\ \frac{-5}{12}\pi$

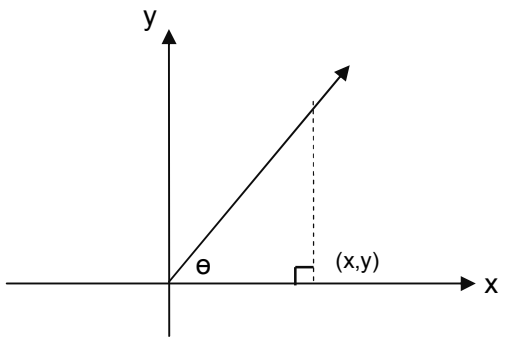
2) Cambia de grados a radianes:

a) 75^0

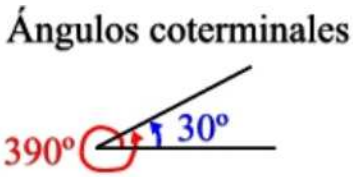
b) 150^0

c) -15^0

ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTANDAR: Un ángulo ɵ está en posición estándar o normal si se traza en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial sobre el eje x positivo.



Dos ángulos en posición estándar son coterminales si sus lados coinciden.



.

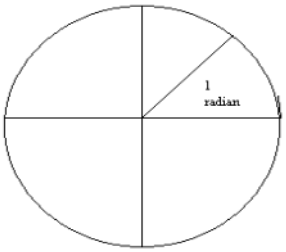
Ejercicio: a) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo ɵ = 30º en posición estándar. b) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo ɵ = π / 3

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

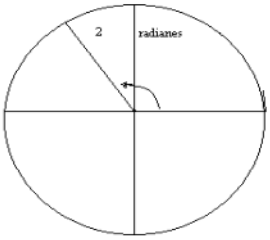
En un círculo de radio r , la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de ɵ radianes es: s = ɵr Al despejar para ɵ obtenemos la formula: ɵ = s / r que nos permite definir la medición en radianes usando un círculo de cualquier radio r.

Ejemplo.

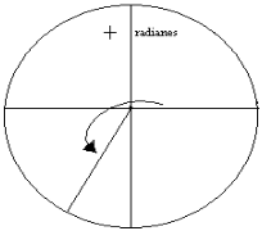
Si ɵ es un ángulo central que mide un radian entonces la longitud del arco subtendido es igual al radio (r). Donde r es la longitud del radio.



Cuando en ángulo Ɵ mide 2 radianes, entonces la longitud del arco subtendido mide 2r.



De manera general si el ángulo mide + radianes entonces la longitud de arco subtendido mide + r.



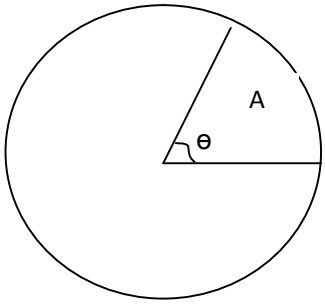
Ejemplo. Encuentre la longitud del arco de un círculo con radio 10 metros, que subtiende un ángulo central de 30º .

Solución: vemos que 30º = π / 6 radianes. Por lo que la longitud del arco s = r ɵ, entonces reemplazando obtenemos que s = (10) π / 6 = 5π / 3 metros.

Ejemplo: Un ángulo central ɵ en un círculo de radio igual a 4 metros está subtendido por un arco de longitud igual a 6 metros. Obtenga la medida de ɵ en radianes.

Solución: Según la fórmula ɵ = s / r, tenemos ɵ = 6 / 4 simplificando ɵ = 3 / 2 radianes.

AREA DE UN SECTOR CIRCULAR: En un círculo de radio r, el área A de un sector con un ángulo central de ɵ radianes es: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$



Ejemplo. Determinar el área de un sector de circulo con ángulo central de 60º si el radio del círculo es de 3 metros.

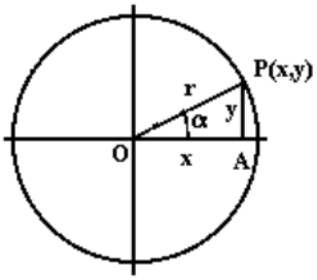
Solución: Primero se debe encontrar el valor en radianes del ángulo central ɵ = 60º = π / 3 radianes.

$$A = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} m^2$$

Ejercicios:

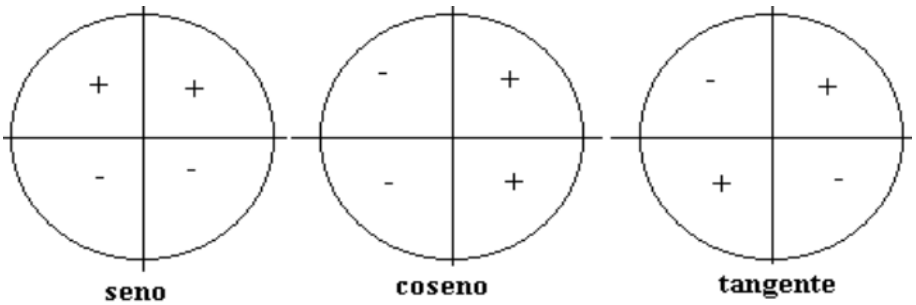
Usted debe ubicarse en el libro de precálculo de James Stewart. página 413 (1 al 50)

Razones trigonométricas. Dada una circunferencia de radio r, si tomamos un arco AP, donde A es un punto del semieje positivo de las x y P(x,y), el punto del extremo, se definen las razones trigonométricas del ángulo en la forma:

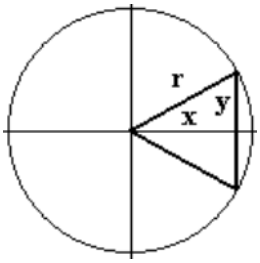


- **Seno** sen α = ordenada / radio = y / r
- **Coseno** cos α = abscisa / radio = x / r
- **Tangente** tg α = seno / coseno = ordenada / abscisa = y / x
- **Cotangente** cotg α = coseno / seno = abscisa / ordenada = x / y
- **Secante** sec α = 1 / coseno = 1 / (x / r) = r / x
- **Cosecante** cosec α = 1 / seno = 1 / (y / r) = r / y

Signo de las razones. En cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas, las razones presentan los siguientes signos:



Ángulos notables. **30º**



30º Para determinar sus razones tenemos en cuenta que se forma un triángulo equilátero: sen 30º = y/r= (r/2) / r = 1/2

cos 30º = x/r = $3^{½}$ / 2

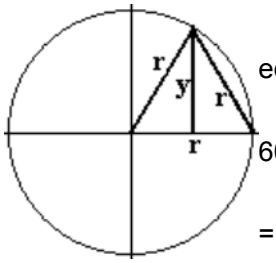
$r^2=x^2+(r/2)^2=x^2+r^2/4$

$x = (3\ r^2 / 4)^{1/2} = r\ 3^{1/2} / 2$

$tg\ 30º = (1/ 2) / (3^{1/2} / 2) = 3^{1/2} / 3$

Ángulo de 60º

Formamos el triángulo



equilátero de la figura:

sen $60º = y / r = (r\ 3^{1/2} / 2) / r= 3^{1/2} / 2$

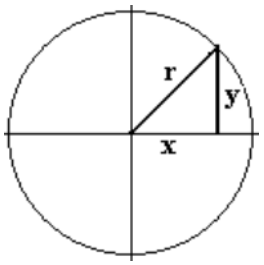
$r^2 = y^2 + (r / 2)^2$

$y = (r^2 - r^2 / 4)^{1/2} = (3\ r^2 / 4)^{1/2} = r\ 3^{1/2} / 2$

$cos\ 60º= (r / 2) / r = 1 / 2$

$tg\ 60º = (3^{1/2} / 2) / (1/ 2) = 3^{1/2}$

Ángulo de 45º



- **45º** La x y la y son iguales, por lo que se forma un triángulo isósceles:

$sen\ 45º = y/r = 2^{1/2} / 2$

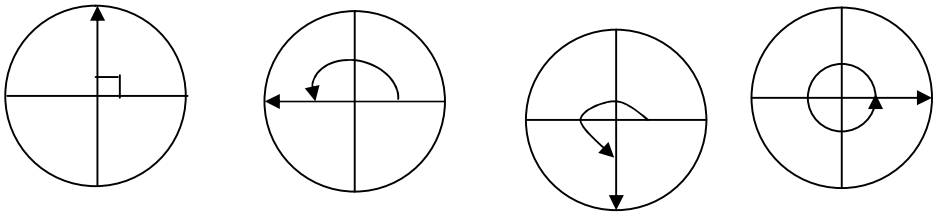
$r^2 = x^2 + y^2 = 2\ y^2$

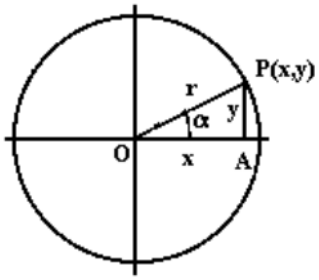
$y=(r^2/2)^{1/2}=r(2^{1/2})/2$

$cos\ 45º= x / r = y = 2^{1/2} / 2$

$tg\ 45º = sen\ 45º / cos\ 45º = 1$

Puntos terminales determinados por ɵ = π / 2, π , 3π / 2, 2π





Relaciones entre las razones trigonométricas.

Teorema fundamental.

sen α = y / r de donde y = r sen α

cos α = x / r de donde x = r cos α

Pitágoras: $x^2+y^2=r^2$ tenemos que

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\text{sen}^2\alpha = r^2$$

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$$

Dividiendo el teorema fundamental entre sen^2.

$$1 + \cos^2\alpha / \text{sen}^2\alpha = 1/\text{sen}^2\alpha$$

$$1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$$

Dividiendo el teorema fundamental entre $\cos^2$.

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = 1 / \cos^2\alpha$$

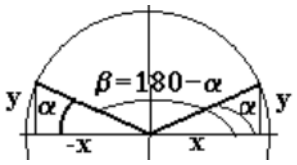
$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$

Otras identidades fundamentales: $\csc\theta = \dfrac{1}{sen\theta}$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{sen\theta}$

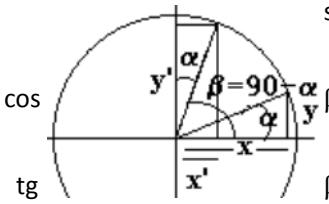
Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos.

Ángulos suplementarios. Teniendo en cuenta la definición de cada razón trigonométrica, se deduce:



$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta \qquad \cos\alpha = -\cos\beta \qquad \text{tg}\ \alpha = -\text{tg}\ \beta$

Ángulos complementarios. Observamos que y'=x y que x'=y

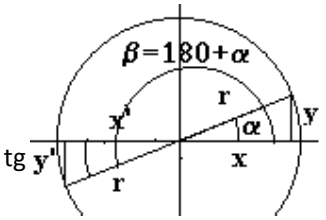


$\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (90-\alpha) = y'/r = x/r = \cos\alpha$

$\beta = \cos\ (90-\alpha) = x'/r = y / r = \text{sen}\ \alpha$

$\beta = \text{cotg}\ \alpha$

Ángulos que difieren en 180º

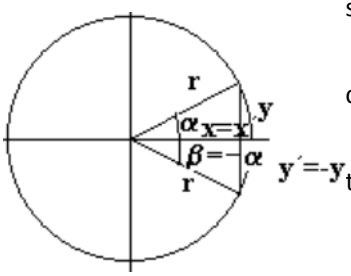


$\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ (180+\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos\beta = \cos\ (180+\alpha) = -\cos\alpha$

$\beta = \text{sen}\ \beta / \cos\beta = -\text{sen}\ \alpha / -\cos\alpha = \text{tg}\ \alpha$

Ángulos opuestos



$\text{sen}\ \beta = y'/r = -y/r = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos\beta = x'/r = x/r = -y/r = \cos\alpha$

$\text{tg}\ \beta = \text{sen}\ \beta / \cos\beta = -\text{sen}\ \alpha / \cos\alpha = -\text{tg}\ \alpha$

Representación de las razones trigonométricas sobre la circunferencia goniométrica

Se denomina circunferencia goniométrica a la que tiene de radio la unidad.

En esta circunferencia: sen α = y / r = y cos α = x / r = x tg α = y / x

cotg α = x / y sec $\alpha = 1/\cos\alpha$ cosec $\alpha = 1/\text{sen}\,\alpha$

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

ɵ	Sen ɵ	Cos ɵ	Tan ɵ	Csc ɵ	Sec ɵ	Cot ɵ
0	0	1	0	-	1	-
π/6	1/2	√3 / 2	√3 / 3	2	2√3 / 3	√3
π/4	√2/2	√2/2	1	√2	√2	1
π/3	√3 / 2	½	√3	2√3 / 3	2	√3 / 3
π/2	1	0	-	1	-	0

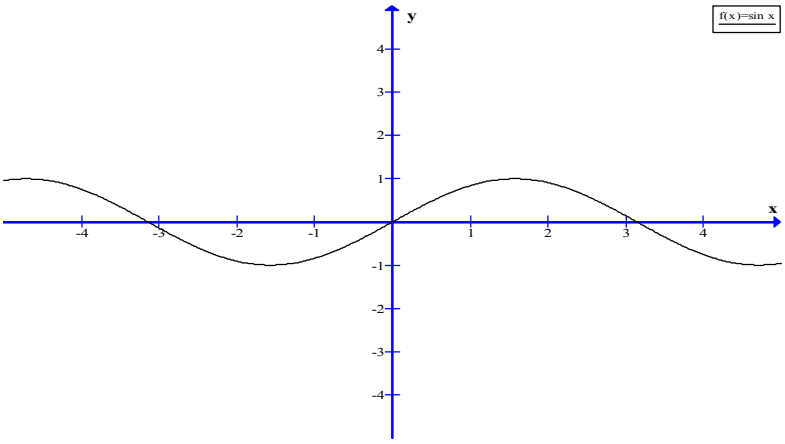
EJERCICIOS.

Remitirse al libro de Matemáticas Previas al Cálculo de Rafael Álvarez y otros. Página 382 (1 al 4, 11 al 28). Página 402 (1, 3, 6)

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

La gráfica de una función nos ayuda a obtener una mejor comprensión de su comportamiento. La función seno tiene un dominio comprendido sobre todo el campo de los reales, haciéndolo en forma periódica (se repite cada 2π). De lo anterior se deduce que el punto Terminal p(x,y) determinado por un número real t, es el mismo que el determinado por el número t + 2π. Es decir sen (t + 2π) = sen t ó también: Sen (t + 2nπ) = sen t, para cualquier n entero. $0 \le t \le 2\pi$.

Es fácil observar que la función se mueve entre los valores -1 y 1, con una característica muy especial, y es que mientras t se mueve entre 0 y π/2, sen t lo hace entre 0 y 1, pero cuando t aumenta de π/2 a π, el valor de sen t disminuye de 1 a 0.



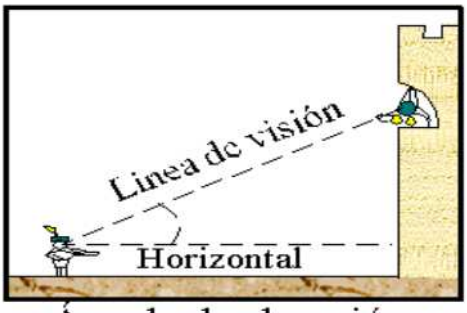
Ejercicio: consulta las gráficas de las otras funciones trigonométricas y practica con ellas. Traza también las funciones:

$$y = \frac{1}{2} sen\ \theta \qquad y = 2 + sen\ \theta \qquad y = sen \frac{1}{2} x$$

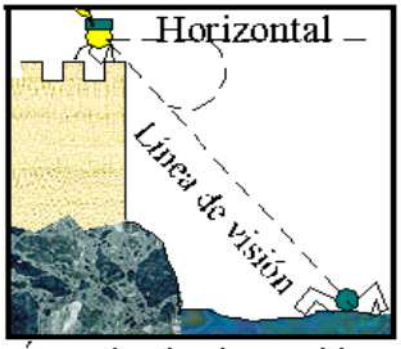
$$y = sen 2\theta \qquad y = -2 sen \theta \qquad y = sen\left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

Trigonometría de los triángulos rectángulos

Se llama línea de visión a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado. Llamamos ángulo de elevación al que forman la horizontal del observador y el lugar observado cuando éste está situado arriba del observador. Cuando el observador está más alto lo llamaremos ángulo de depresión.



Ángulo de elevación

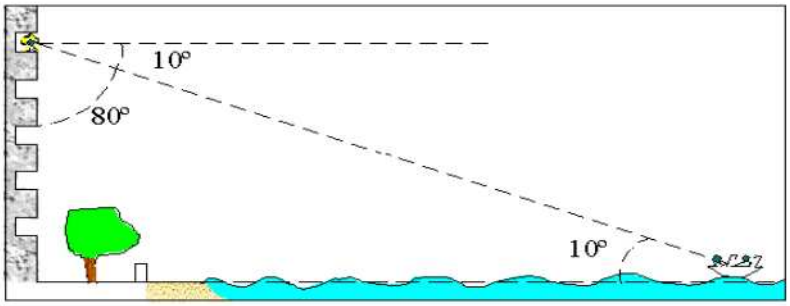


Ángulo de depresión

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Tangente de un ángulo

Marta, que vive en primera línea de playa, observa un hidropedal averiado bajo un ángulo de depresión de 10º. Ella estima que la altura de su apartamento es de 20 m y que la distancia del portal a las olas es de 50 m.

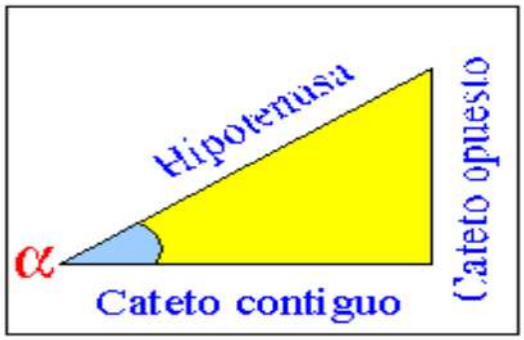


Como desea conocer lo que deben nadar sus ocupantes hasta alcanzar la costa, con la ayuda de un transportador de ángulos dibuja un triángulo semejante y, posteriormente, mide sus catetos. Por ser proporcionales con el triángulo real, Marta consigue averiguar lo que debían nadar sus ocupantes para alcanzar la playa.

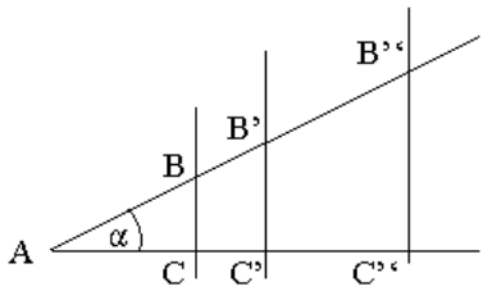
Realiza en tu cuaderno la proeza de Marta.

Definición

Consideremos un ángulo agudo cualquiera y tracemos una perpendicular por su semirrecta base obteniendo el triángulo ABC, llamaremos tangente de A a la razón BC/AC. El Teorema de Thales garantiza que el lugar por el que trazamos la perpendicular es indiferente para el cálculo de la tangente:



$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \quad \cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \quad \tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$



$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''}$$

En general, sobre un triángulo rectángulo, diremos que la tangente del ángulo es la razón cateto opuesto/cateto adyacente.

De igual manera diremos que el coseno del ángulo es la razón cateto adyacente/hipotenusa y que el seno de éste es cateto opuesto/hipotenusa.

También se utilizan las inversas de la tangente, el coseno y el seno, que se llaman respectivamente cotangente, secante y cosecante:

$$\cot\alpha = \frac{c.o}{c.a} \quad \sec\alpha = \frac{h.}{c.o} \quad \csc\alpha = \frac{h.}{c.a}$$

A la tangente, coseno, seno y a sus inversas se las llama razones trigonométricas del ángulo "

Estima, sirviéndote de un transportador de ángulos y midiendo segmentos en los correspondientes dibujos, las razones trigonométricas de los ángulos de 40º y 60º.

Obtención de las razones trigonométricas mediante la calculadora

Anteriormente hemos estimado las razones de los ángulos mediante la medida de segmentos. La imprecisión de la medida provoca que se obtengan valores con poca exactitud. Existen técnicas matemáticas que permiten conocer con suficiente finura el valor de la tangente, el coseno y el seno de un ángulo, pero no se estudian en este curso. No obstante, puedes hacer uso de tu calculadora para obtener una buena estimación utilizando la teclas TAN, COS y SIN.

Pasos para hallar el valor de la tangente del ángulo de 40º:

40 TAN = 0.8390996.

En otros modelos de calculadora se pone TAN en primer lugar y después se introduce 40.

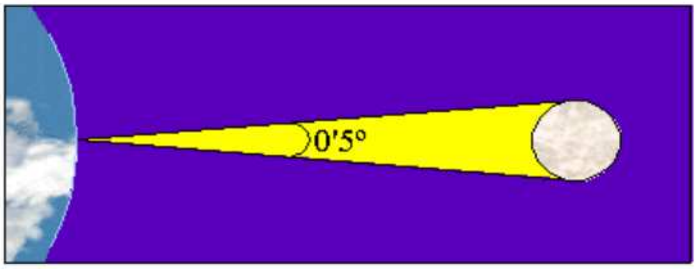
También es posible, conocida la tangente del ángulo, averiguar el ángulo del que se trata. Supongamos que la tangente de un ángulo vale 2.75:

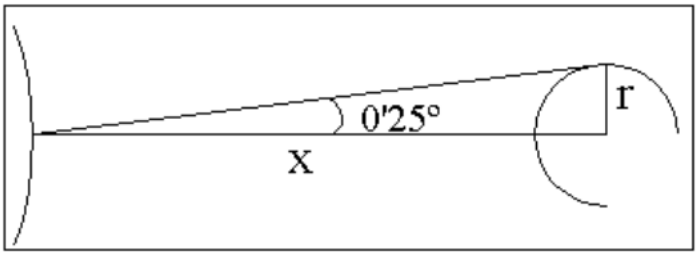
2.75 TAN^{-1} = 70.016893, se trata de un ángulo 70º aproximadamente. En otras calculadoras se introduce 2.75 después de TAN^{-1}.

Si Marta hubiera estudiado la tangente y dispuesto de una calculadora, no tendría que haber recurrido al dibujo para calcular la distancia del hidropedal hasta el portal de su casa:

tan(80º)=x/20; x=20. tg(80º)=20 (5,6712818) =113'42 m aproximadamente.

Aplicaciones: **Estimación de la distancia Tierra-luna**





$$\text{tg } 0'25° = \frac{r}{x}$$

$$x = \frac{r}{\text{tg } 0'25°} \cong \frac{1738}{0'0043633}$$

$$\cong 398317 \text{ Km}$$

Ya conoces que el radio lunar es de 1738 Km. Se puede comprobar que si observamos la Luna desde la Tierra, contemplamos su disco bajo un ángulo de medio grado.

Si a x, que es la distancia hasta el centro de la Luna, le quitamos los 1738 Km del radio obtendremos un valor estimado de la separación entre Tierra y Luna de 396579 Km..

(Sin salir de casa hemos podido tener una idea aproximada de lo lejos que estamos de la Luna. Se ha podido conocer, mediante el envío de rayos láser, que la distancia media hasta la superficie lunar es de 384403 km)

Estimación de la distancia Tierra-S❑

Aristarco (s. III a. J.), célebre astrónomo de Alejandría, intentó calcular cuántas veces era mayor la distancia de la Tierra respecto del Sol que de la Luna. Cuando

observamos la Luna en cuarto creciente las líneas Tierra-Luna y Luna-Sol forman un ángulo de 90º. Aristarco midió el ángulo que formaba la tierra con la Luna y el Sol estimando su valor en 87º.

De esta forma:

$$\cos 87^\circ = \frac{(T-L)}{(T-S)}; \qquad (T-S) = \frac{(T-L)}{0'0523359} = 19'1\,(T-L)$$

Aristarco obtuvo que la distancia de la Tierra hasta el Sol era unas veinte veces mayor que hasta la Luna. Si sustituimos el valor (T-L) comentado anteriormente, obtenemos una distancia solar de 7344920 Km.

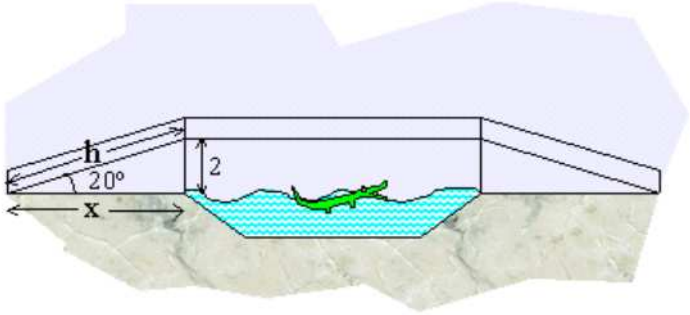
Volviendo con nuestro astrónomo, faltaba comentar que cometió un pequeño error al medir el ángulo cuyo valor real se aproxima bastante a 89º 50'. Esta pequeña diferencia en la medida del ángulo se tradujo en una gran diferencia respecto de la verdadera separación Tierra-Sol

Con mayor precisión se ha podido establecer que el Sol dista unos 150 millones de Km. Como recordarás, a este valor se le llama unidad astronómica (UA).

Mediciones

Se desea construir un puente sobre un río, que mide 10 m de ancho, de manera que quede a una altura de 2 m sobre el agua y que las rampas de acceso tengan una inclinación de 20E. ¿Cuál debe ser la longitud de la baranda?, ¿a qué distancia del cauce se situará el comienzo de la rampa?

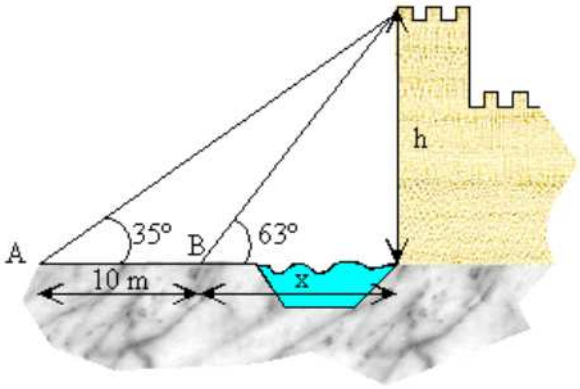
$$\text{sen } 20^\circ = \frac{2}{h};\ h = \frac{2}{\text{sen } 20^\circ} \cong 5'84 \text{ cm}: \qquad \text{tg } 20^\circ = \frac{2}{x};\ x = \frac{2}{\text{tg } 20^\circ} \cong 5'49:$$



la baranda es de unos 21 m y 70 cm. La escalera comienza a unos cinco metros y medio del cauce.

Cálculo de alturas

Se desea calcular la altura de la torre, para ello se miden los ángulos de elevación desde los puntos A y B. Con los datos de la figura tenemos que:



$$0'839 \cong tg40^\circ = \frac{h}{10+x}$$

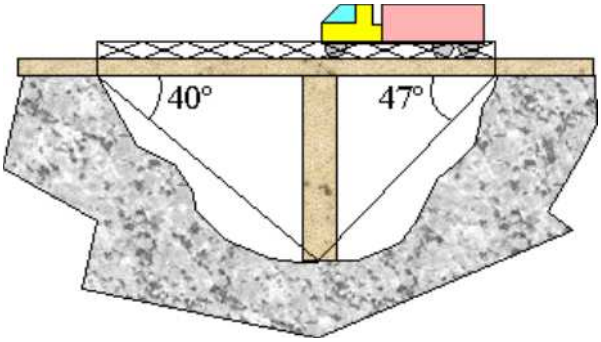
$$1'96 \cong tg63^\circ = \frac{h}{x}$$

Si despejamos h en las dos igualdades e igualamos tenemos:

(10+x)·0'839=1'96·x; 8'39+0'839·x=1'96·x; 8'39=1'121·x; x=7'484 m, aproximadamente.

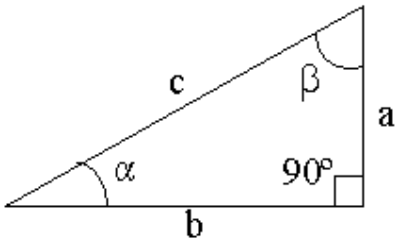
h=7'484·1'96=14'668. La torre mide unos 14 metros y medio de alto.

- Halla la altura del puente, sabiendo que tiene 17 m de largo.



PROPIEDADES

Consideremos el triángulo rectángulo de la figura:



En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que los catetos, si consideramos la definición del seno y el coseno es evidente que:

0 < cos " <1 y 0 < sen " < 1, para cualquier ángulo agudo ".

Propiedad fundamental:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$$

Es frecuente en trigonometría que aparezcan los términos (sen ")^2 y (cos ")^2, para

abreviar su escritura suelen notarse como sen^2 " y cos^2 "..

De esta manera el teorema fundamental aparece como

$$sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1.$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

Actividad resuelta

De un ángulo agudo " sabemos que su seno vale 0'8. Hallar el coseno y la tangente: $sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Sustituyendo:

$0'8^2 + \cos^2 \alpha = 1$; $\cos^2 \alpha = 1 - 0'64 = 0'36$. Tomando raíces, $\cos \alpha = \sqrt{0'36} = 0'6$

$$tg\, \alpha = \frac{sen\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0'8}{0'6} = 1'\bar{3}$$

Aunque es conveniente que conozcas muy bien el procedimiento anterior, también es posible resolver el problema con la ayuda de la calculadora:

0'8 $\sin^{-1}$= 53.130120, nos devuelve el valor aproximado del ángulo cuyo seno vale 0'8.

Ejercicios: Libro de Precálculo de James Stewart páginas 422 ejercicios 6.2 (del 1 al 30), (33, 37, 38,39, 40)

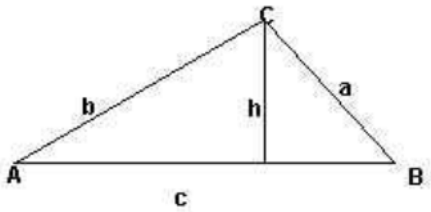
LEY DE SENOS, COSENOS

Las funciones trigonométricas también pueden ser utilizadas para resolver triángulos oblicuángulos**,** esto es triángulos que no tengan ningún ángulo recto. Para ello es necesario conocer la ley de senos y cosenos.

La clave para resolver el problema de determinar las tres medidas faltantes en un triángulo está en usar apropiadamente las siguientes fórmulas trigonométricas.

La ley de senos

En palabras, dice que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos



opuestos. La fórmula es:

$$\frac{sen\,A}{a} = \frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,C}{c}$$

La ley de cosenos

Es una extensión del Teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos. Puede verse en tres formas distintas pero equivalentes:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

En ninguna de las fórmulas está despejado un ángulo. Si se quiere encontrar el valor de un ángulo deberá despejarse de la fórmula apropiada (dependiendo de los datos que se conocen) y aplicar seno inverso o coseno inverso.

Ejercicios:

1.Resolver un triángulo tal que a=4.5 cm., B=30º y C= 78º.

2.Resolver un triángulo sabiendo que a=4.5 cm. B=35º y b=10 cm.

3. Resolver el triángulo con a=2.3 m., b=160 cm. y c= 4 m.

4. Resolver el triángulo a=3 m., b=5 m. y C= 80º.

5. Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 cm., respectivamente y se cortan bajo un ángulo de 50º. Hallar el perímetro del paralelogramo.

6. Desde un punto se observan unos chopos con un ángulo de 36º, si avanzamos hacia ellos en línea recta y los volvemos a observar el ángulo es de 50º. ¿Qué altura tienen los chopos?.

7. Tres puntos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 Km., la BC es 9 Km. y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C?.

8. Un carpintero debe hacer una mesa triangular de tal forma que un lado mida 2m., otro 1.5 m. y el ángulo opuesto al primer lado debe ser 40º. ¿Lo conseguirá?.

9. Dos personas caminan por un sendero, pero en un punto se bifurca formando un ángulo de 38º y cada uno va por su lado, uno camina a 3 km. por hora y el otro a 3.5 km. por hora, ¿a qué distancia se encuentran al cabo de media hora?.

10. Desde los puntos A y B de una misma orilla de un río y separados entre si 12 m., se observan el pie P y la copa C de un pino, situado en la orilla opuesta. Calcular la altura del pino, sabiendo que los ángulos miden PAB=42º, PBA=37º y PAC=50º

Recuerde que en los libros de matemáticas previas al cálculo de Rafael Álvarez y otros, Precálculo de James Stewart y otros, usted encuentra ejercicios para la aplicación de la ley del seno y coseno.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas. En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas. No puede especificarse un método general que permita resolver cualquier ecuación trigonométrica; sin embargo, un procedimiento efectivo para solucionar un gran número de éstas consiste en transformar, usando principalmente las identidades trigonométricas, todas las funciones que aparecen allí en una sola función (es recomendable pasarlas todas a senos o cosenos). Una vez expresada la ecuación en términos de una sola función trigonométrica, se aplican los pasos usuales en la solución de ecuaciones algebraicas para despejar la función; por último, se resuelve la parte trigonométrica, es decir, conociendo el valor de la función trigonométrica de un ángulo hay que pasar a determinar cuál es ese ángulo.

Nota: en las soluciones pueden aparecer valores extraños (debido a la manipulación de las ecuaciones al tratar de reducirlas), por ejemplo: nos puede resultar un $\cos x = 2$, el que debemos descartar, obviamente, pues el codominio del coseno se limita a [-1, 1]. También, debemos verificar todas las respuestas obtenidas y aceptar sólo aquellas que satisfacen la ecuación original.

Como las funciones trigonométricas repiten su valor y signo en dos de los cuadrantes, hay que tener presente que siempre habrá por lo menos dos ángulos distintos en la solución de una ecuación trigonométrica de la forma $\mathrm{tri}\,x = a$ (donde tri: es una de las seis funciones trigonométricas y a: número cualquiera en el codominio de la función). Además, debido a que cuando el lado terminal de un ángulo realiza un giro completo se genera otro ángulo equivalente, es necesario añadir a las soluciones obtenidas un múltiplo de 360°, esto es, k360°, y k es un entero.

Ejemplo ilustrativo. Encontrar los valores para x que satisfacen la ecuación:

$$4\operatorname{sen}^2 x\tan x - 4\operatorname{sen}^2 x - 3\tan x + 3 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (4\operatorname{sen}^2 x\tan x - 4\operatorname{sen}^2 x) - (3\tan x - 3) = 0 \qquad \{\text{asociando convenientemente}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4\operatorname{sen}^2 x(\tan x - 1) - 3(\tan x - 1) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\},$$

$$\Rightarrow \quad (\tan x - 1)(4\operatorname{sen}^2 x - 3) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad \tan x - 1 = 0 \ \text{ ó bien } \ 4\operatorname{sen}^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \ \text{ ó bien } \ \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\therefore \quad x = 45°, \text{ ó } x = 225°; \ \text{ ó bien } \ x = 60°, \text{ ó } x = 120°$$

Solución: $x = \begin{cases} 45° + k360° \\ 60° + k360° \\ 120° + k360° \\ 225° + k360° \\ 240° + k360° \\ 300° + k360° \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Ej

Ejemplo. Encontrar los valores para x que satisfacen la ecuación:

$$\csc x + \cot x = \sqrt{3},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \qquad \{\text{identidades}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1 + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x} = 3 \qquad \{\text{elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3\operatorname{sen}^2 x,$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) \qquad \{\text{identidad}\},$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3 - 3\cos^2 x \qquad \{\text{destruyendo paréntesis}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$

$$\{\text{transponiendo, reduciendo y simplificando}\},$$

$$\Rightarrow \quad (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad 2\cos x - 1 = 0 \ \text{ ó bien } \ \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \text{ ó bien } \ \cos x = -1;$$

$$\therefore \quad x = 60°, \text{ ó } x = 300°; \ \text{ ó bien } \ x = 180°$$

Al hacer las sustituciones en la ecuación original sólo la satisface $x = 60°$

Solución: $x = \{60° + k360°, \ k \in \mathbb{Z}.$

Ejemplo.

$$4\cos 2x + 3\cos x = 1,$$

$$\Rightarrow \quad 4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 3\cos x = 1 \qquad \{\text{coseno del ángulo duplo}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 1 \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 1 \qquad \{\text{identidad}\},$$

$$\Rightarrow \quad 4\cos^2 x - 4 + 4\cos^2 x + 3\cos x = 1 \qquad \{\text{efectuando el producto indicado}\},$$

$$\Rightarrow \quad 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \qquad \{\text{reduciendo}\},$$

$$\Rightarrow \quad (8\cos x - 5)(\cos x + 1) = 0 \qquad \{\text{factorizando}\};$$

$$\therefore \quad 8\cos x - 5 = 0 \ \text{ ó bien } \ \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{8} \ \text{ ó bien } \ \cos x = -1;$$

$$\therefore \quad x = 51°19', \ \text{ó } x = 308°41'; \ \text{ó bien } \ x = 180°$$

Al hacer las sustituciones en la ecuación original todos la satisfacen

$$\text{Solución: } x = \begin{cases} 51°19' + k360° \\ 308°41' + k360°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 180° + k360° \end{cases}$$

Ejercicios: En el libro de precálculo James Stewart página 499 ejercicio 7.5 (del 1 al 38) y del libro *Matemáticas previas al cálculo* de Rafael Álvarez J. y otros página 409 (1 al 25 los impares).

FORMULAS IMPORTANTES NECESARIAS EN ALGUNAS IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \qquad \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

SEMI-ÁNGULO

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

2. <u>Escogencia de un motivo</u>. Para el planteamiento de esta situación problema, en particular, se tiene el siguiente motivo que se ajusta tanto a las condiciones sociales como individuales de los estudiantes.

La Hacienda Bonanza

Está ubicada al N19.3°E de la ciudad de Medellín, para llegar hasta este sitio es necesario realizar un recorrido en carro de seis (6) horas, en sentido norte a una velocidad promedio de 50 kilómetros y luego con una velocidad de 70 kilómetros durante una hora y media en sentido este. Bonanza es una de las maravillas que existen en este sector. Tiene 1.800 hectáreas de extensión y disfruta de todas las comodidades angelicales que puede tener una finca tradicional con remodelaciones tecnológicas de punta

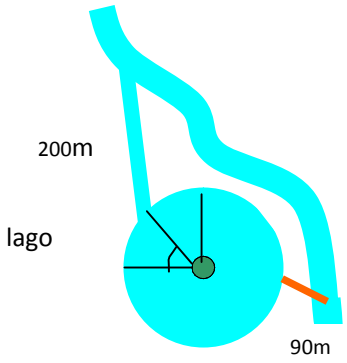
A continuación se hará una descripción de todas sus comodidades:

Sus LINDEROS muy bien delimitados, parten de una majestuosa portada, con dos palmas a cada lado que permiten identificar la imagen de la hacienda. A una altura de seis (6) metros entre las palmas aparece el letrero BONANZA, imponente, majestuoso, único en su territorio. Cada letra ocupa un lugar específico entre las palmas a lado y lado de la portada. Son doce (12) metros de ancho el espacio que ocupan estas letras, teniendo en cuenta que la primera es con espacio doble en su construcción. Todo el lindero de la hacienda permite desde el aire visualizar una figura geométrica de tipo hexagonal regular. Este lindero está cercado en todo su perímetro con

alambre de púas (cuatro hiladas), con soportes (estacones) cada tres (3) metros, la estructura de la entrada no presenta este cerco.

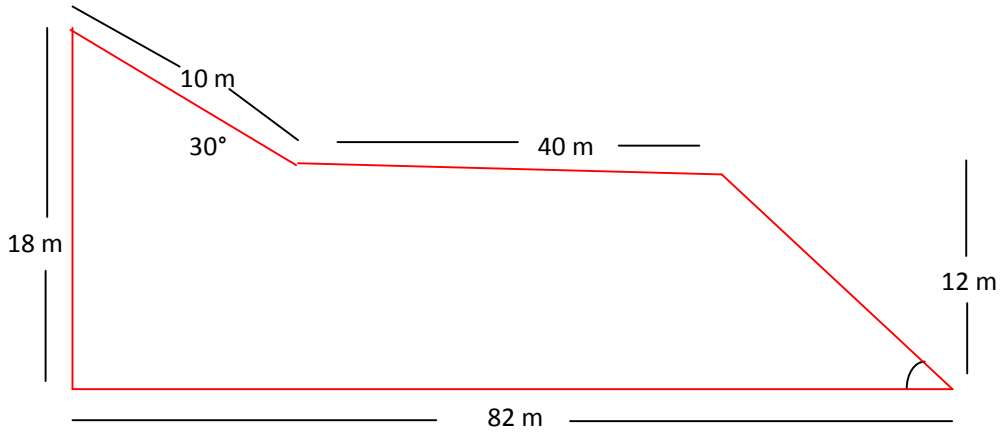
Dentro de sus construcciones aparecen tres casas: La principal posee catorce (14) habitaciones en dos niveles, diez (10) en la parte superior y cuatro (4) en la parte inferior, todas con sus respectivos baños, hay escaleras para subir a las habitaciones superiores, por dentro y por fuera de la casa. Las escaleras de por afuera tienen un ángulo de elevación de treinta (30) grados, las internas tienen un ángulo de depresión de $2\pi/9$, la altura entre el primero y el segundo piso es de dos metros con ochenta centímetros (2.80 mts). El área construida en el segundo piso para las habitaciones es de doscientos metros cuadrados (200 m^2). El área común en el primer piso conformada por la sala, el comedor y la cocina forma una función sinusoidal de cuarenta metros de largo por 10 metros de ancho, y teniendo en cuenta que su punto centro está en el comedor.

La hacienda es atravesada por una quebrada que tiene su nacimiento un kilómetro más arriba de ésta, cuando se hace el ascenso hasta el nacimiento de la quebrada, la persona que se para a mirar hacia la finca desde este punto forma un ángulo de depresión de 28°, y se dice que este nacimiento tiene una altura en relación con la hacienda de ciento cincuenta (150) metros; la quebrada es ramificada (en dos cauces) el normal y otro desviado en su recorrido doscientos (200) metros, para caer a un lago dentro de la finca, lago de forma semiesférica con un perímetro de tres kilómetros en su superficie; los ángulos centrales de 45° en el lago permiten trazar unas zonas de exclusividad para algunos deportes: natación ocupa toda el área comprendida en una de estos sectores circulares, esquí náutico ocupa dos sectores circulares, bicicletas marinas tres sectores y el resto está destinado para la pesca. El lago posee un desagüe (cuando se reboza) con una capacidad de salida de un metro cúbico por minuto, por un tubo de ochenta metros de largo, un radio de 90 cms y un ángulo de depresión de 30°, tomado desde el punto centro del lago, allí se une nuevamente a su cauce normal, como se aprecia en la figura:



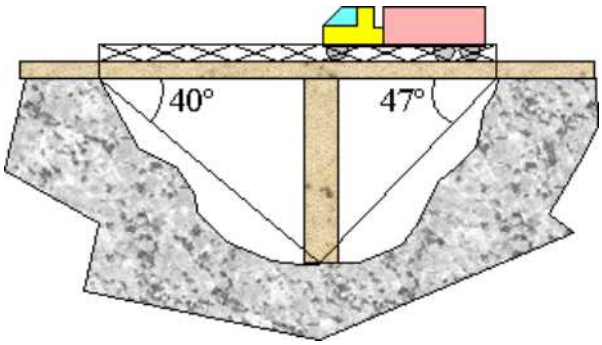
Los visitantes pueden utilizar en los lagos de pesca, pequeñas embarcaciones que se visualizan desde el segundo piso de los balcones de las habitaciones en la casa principal y algunos se atreven a decir "la distancia entre las habitaciones del segundo piso y el muelle de estas lanchas es de 300 metros y que el ángulo de depresión es de 20º"

Para todos estos deportes y para la administración de la hacienda existe un talento humano, capacitado cada uno en sus áreas, pues de todos es conocido que la hacienda recibe a muchos turistas. Los vaqueros de la finca que utilizan sus días en la labor del ganado son muy aficionados a la astronomía, viven en sus noches buscando fantasías con las estrellas y haciendo constantes mediciones; han llegado a tal punto que ellos mismos hicieron el trazado del terreno para el potrero, llegando a presentar el dibujo que se aprecia a continuación:



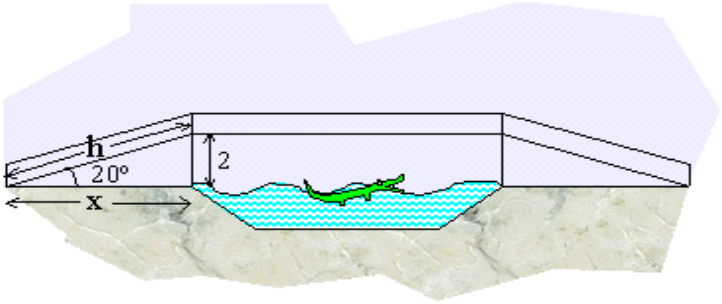
En la finca hay un sembrado de árboles frutales con unas características muy especiales: Un círculo de ocho (8) metros cuadrados, que sirve de punto centro como inicio en los ejes de coordenadas, desde donde se extiende el sembrado de estos frutos; los árboles con frutos de mangos hacen las veces de ordenadas y los naranjos de abscisas, la distancia entre cada árbol siempre es de diez (10) metros, cualquiera sea su variedad, de cada uno de éstos hay 200 árboles. Desde el mismo punto centro se inicia un segmento de recta en árboles con frutos de limones en sentido N30ºO, hasta recorrer un mil quinientos (1.500) metros. Luego aparece otro segmento de recta 15º de más que la recta anterior, pero manteniendo la misma dirección y partiendo del mismo centro con una siembra de árboles con frutos de aguacates, en la misma cantidad a la anterior. Formando un ángulo positivo de 150º, aparece un nuevo segmento de recta de 90 árboles papayos, este ciclo se repite hasta completar los 2π radianes. La siembra antes referida tiene un cerco en vareta ocho (8) metros después del último árbol de cada segmento de recta, con tres hiladas y un estacón cada tres metros. Las cosechas de los árboles frutales se hace a través de bandas transportadoras que hacen un recorrido desde el campo de recolección hasta el punto de almacenamiento, es simpático observar como estas bandas forman dos ángulos complementarios, teniendo en cuenta un punto intermedio que sirve de estación para empacar las unidades recolectadas en cajas por docenas.

Desde la portada que sirve de entrada principal a la hacienda se extiende una carretera por toda ésta, que da pie a una nueva salida, es una recta que inicia un recorrido N12ºE durante 5 minutos a un promedio de velocidad de 30 kms por hora, luego se debe girar en sentido S15ºE, hasta salir de nuevo a la carretera principal la cual hace el lindero de la hacienda por unos de sus costados. En este recorrido interno se debe pasar dos pequeños puentes, el primero de ellos tiene una estructura como aparece en la figura (la columna que lo soporta es de 15 mts.).



El otro puente presenta una parte plana equivalente a **2h** y una altura de

2 mts, con características como se aprecia en la figura que se presenta a continuación:



3. <u>Estados de complejidad</u>

4. <u>Proponer una estrategia</u>

5. <u>Ejercitación</u>

6. <u>Ampliación de los conceptos dados</u>

Todas estas actividades para el planteamiento de una situación problema se hacen teniendo en cuenta los interrogantes que surgen a partir del motivo. Los interrogantes permiten medir la capacidad de comprensión y entendimiento con base en los temas tratados, recordando además, que el desarrollo de las competencias para abordar este tema de la trigonometría no son más que aplicaciones a la vida diaria.

1. Teniendo como centro la ciudad de Medellín, dibuja un plano cartesiano y ubica la Hacienda.
2. Cuál es la distancia en línea recta desde la ciudad de Medellín hasta la Hacienda.
3. De cuántos grados son los ángulos interiores que se forman, en el triángulo que utilizó, para encontrar la respuesta en la pregunta anterior.
4. Cuál es la altura de la Hacienda en relación con el eje x, teniendo en cuenta el plano cartesiano.
5. Cuántos estacones tiene la hacienda para sostener el alambre utilizado en el lindero.

6. Qué cantidad de alambre se necesitó para cubrir todo el lidero de la hacienda.
7. Realice un bosquejo de la vista de la Hacienda desde el aire.
8. ¿Cuál de las dos escaleras que posee la hacienda para llegar a las habitaciones del segundo piso son más inclinadas?
9. ¿Qué espacio horizontal ocupa cada escalera?
10. ¿Cuánto mide cada escalera?
11. Consulte la figura formada por la sala, comedor y cocina, dibújala y encuentra el valor de su área (en este punto necesitarás la ayuda del profesor de Cálculo.
12. ¿Es cierto que la altura de la finca en relación con el nacimiento de agua es de 150 metros? (en caso tal de ser falso indique la medida correcta).
13. ¿Qué área ocupa cada deporte en el lago de propiedad de la finca?
14. ¿Qué volumen de agua tiene el lago cuando está lleno?
15. ¿Es posible realizar la figura y verificar las medidas de la visualización de las embarcaciones desde el segundo piso de la hacienda?
16. Indique el área, el perímetro y el valor de los ángulos interiores ocupados por el potrero.
17. Realice un bosquejo de la zona ocupada por los árboles frutales.
18. ¿Cuántos árboles de cada fruto hay sembrados?
19. ¿Qué espacio ocupa cada variedad de frutos?
20. ¿Cuál es la cantidad de estacones y vareta utilizada en el perímetro para proteger estos árboles?
21. Realice un bosquejo de la carretera de la finca.
22. ¿Cuánto mediría la carretera si se trazara en línea recta desde la entrada hasta la salida?
23. ¿Cuántos metros se recorre al pasar los dos puentes?

7. Implementación de una estrategia para evaluar las competencias

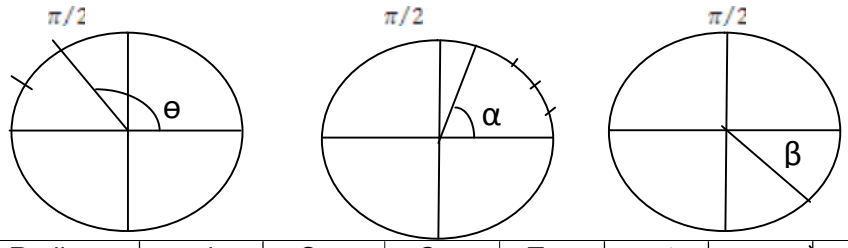
La situación problema facilita todas las herramientas necesarias y suficientes para dar solución a las preguntas propuestas. Estas preguntas no son seleccionadas de cuestionarios clásicos, ellas son diseñadas con base en los indicadores de logros, que facilitan un diagnóstico muy acertado hacia competencias establecidas en cada tema. El siguiente es un ejemplo más concreto sobre una prueba y su correspondiente formato de evaluación por competencias:

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
GRUPO SUMMA
ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA
APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÈTRICAS

NOMBRE _____MAYO 2007

1. Complete el siguiente cuadro, según los gráficos:



Ángulos	Radianes	grados	Sen	Cos	Tan	cot	sec	csc
ɵ								
α								
β								

Si el $sen\ \delta = \frac{2}{3}$, hallar el valor numérico de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos^3\delta}{\tan\delta} + \sqrt[3]{\frac{\sec^2\delta - 1}{\cot\delta + 1}} - \csc^4\delta$$

Dos personas parten de una finca por senderos diferentes formando un ángulo de 40º, una de ellas camina a 4 kms/h y la otra a 4.5 kms/h. ¿A qué distancia se encuentran separadas entre si, al cabo de hora y media? Realice un gráfico aproximado.

A continuación, se presenta el formato de evaluación por competencias, con sus respectivos indicadores de logros, asignado a la prueba anterior.

UIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

Evaluación por **competencias**. Tema: Aplicación de razones trigonométricas. Prueba corta 8.

Nombre: _____

PUNTOS	COMPETENCIA EVALUADA	APLICA		
		Tot.	Parc.	NO
PRIMERO	INTERPRETACIÓN DE MODELOS: Dado un modelo de ángulos en el círculo trigonométrico es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su gráfica.			
	DEMOSTRATIVA: Aplicar procesos lógicos para obtener respuestas.			
	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados por medio de calculadora.			
SEGUNDO	INTERPRETATIVA DE MODELOS: Dado un modelo matemático de funciones trigonométricas de ángulos es capaz de identificar los elementos que lo relacionan y construir su gráfico.			
	DEMOSTRATIVA: Aplica procesos lógicos para obtener respuestas.			
	VERIFICATIVA: Identificados y aplicados los algoritmos, es capaz de verificar procesos por intermedio de su calculadora			
TERCERO	INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS: Interpreta del lenguaje natural al lenguaje matemático llevando a un modelo lógico, para la operación de algoritmos			
	. INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS: Del lenguaje natural al matemático facilita la construcción del modelo gráfico. COMPETENCIA CREATIVA: Aplica adecuadamente un algoritmo para resolver un problema.			

Este cuadro permite una apreciación cualitativa y cuantitativa, si se quiere, de los logros adquiridos por los estudiantes hasta el momento con lo facilitado parcialmente, puesto que ya para un examen completo sobre la consolidación de la trigonometría se considera así:

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

GRUPO SUMMA

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA

NOMBRE_____

DOCUMENTO_____ PROGRAMA_____

1. PROBLEMA: Un helicóptero está volando a 500 metros de una base militar que está separada 300 metros del helipuerto, un soldado ubicado en la base mira hacia el helicóptero formando un ángulo de elevación de 75°.
   a) Construya un dibujo que represente el enunciado del problema
   b) ¿Cuál es la altura del helicóptero al piso en ese preciso momento?
   c) Hallar la distancia del helicóptero al helipuerto.
   d) ¿Cuánto vale el ángulo de depresión del helicóptero al helipuerto?

2. Halle los valores de ɵ para el intervalo dado que satisface la ecuación:

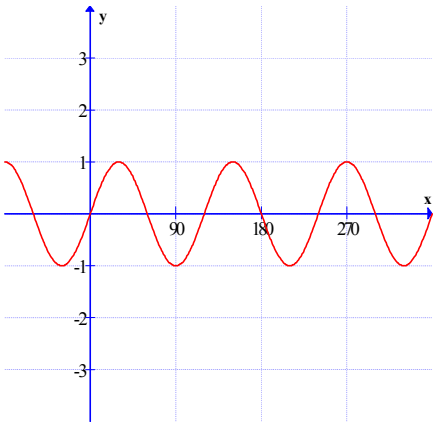
   $3sen^2\theta + cos2\theta = 2 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

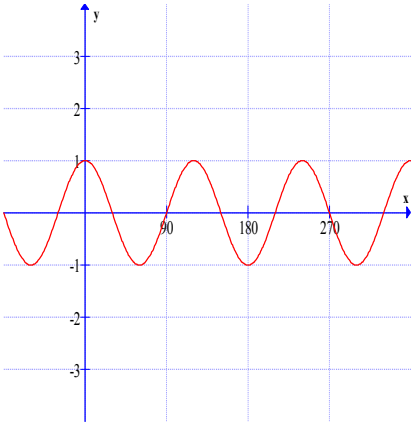
3. Si $-\pi \leq x \leq \pi$, dadas las funciones $y = sen\,2x$
   $y = 2sen\,x$

   a) Determine el rango para cada función
   b) ¿Son iguales las dos funciones? ¿Por qué?
   c) Justifique con una tabla de valores, ¿para qué valores de x se obtienen los puntos máximos en cada función?

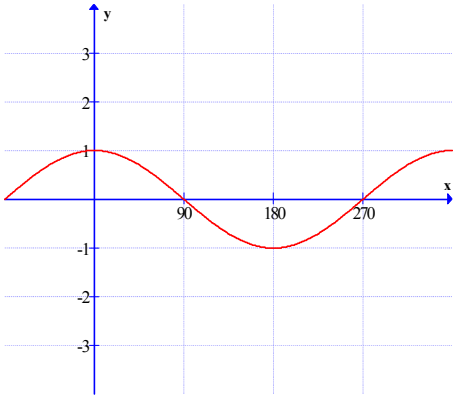
4. Relacione las gráficas y las funciones dadas, justifique cada relación utilizando una tabla de valores:

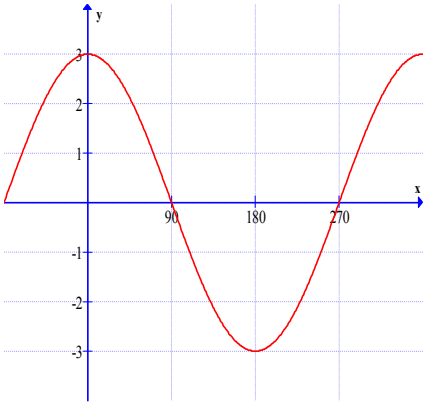
5. a) $f(x) = cos3x$ b) $f(x) - cos\frac{x}{3}$ c) $f(x) = \cos x^3$
   d) $f(x) = sen3x$ e) $f(x) = 3cosx$ f) $f(x) = cosx$





_____ _____


y
3
2
1
x
90
180
270
-1
-2
-3


y
3
2
1
x
90
180
270
-1
-2
-3

El formato de evaluación por competencias para la evaluación anterior es:

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Asunto: Formato de la evaluación Aplicada a Trigonometría.

Nombre_____

Punto	Competencia evaluada	LOGROS		
		Total	Parcial	No aplica
Primero	**Pragmática y Comunicativa**: Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representación en la interpretación y solución de problemas conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema.			
	Creativa: Aplica adecuadamente un algoritmo para resolver un problema.			
	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados según su modelo gráfico.			
Segundo	**Demostrativa:** Aplica procesos lógicos para obtener respuestas			
	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Tercero	**Interpretativa de Modelos Matemáticos:** Recurre a dibujos (relaciones icónicas) para representar relaciones y operaciones.			
	Argumentativa: Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones.			
Cuarto	**Contrastativa:** Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
	Interpretación de Modelos: Dado un modelo es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su gráfico.			
	Argumentativa: Justifica o explica los procesos lógicos o las razones por qué usa estrategia en determinadas situaciones.			

Se aprecia que el formato de evaluación para la prueba anterior está sujeto directamente a las preguntas que se elaboraron para diagnosticar la consecución de los logros establecidos y así poder ratificar el desarrollo de las competencias que debe cumplir el estudiante.

4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y TRATAMIENTO ESTADÍSTICO

En este capítulo se hace un análisis comparativo de manera descriptiva y gráfica de los resultados, obtenidos en las diferentes etapas de la evaluación: evaluación diagnóstico, evaluación en proceso y evaluación final, esta información se presenta en forma de histogramas y tablas, pues permite hacer comparativos de las evaluaciones y resaltar las diferencias y semejanzas que se presentan al evaluar la competencia interpretativa, comunicativa, creativa, pragmática, argumentativa y contrastativa; categorizadas por el equipo investigador, por medio de los indicadores de logros propuestos por el profesor Orlando Mesa Betancur y consignados en el marco teórico; además se analizan las diferencias horizontales de logro(aplica vs no aplica) y las diferencias verticales(cualificación del logro de la competencia, entre el estado final y el diagnóstico). Para la evaluación cualitativa de estas competencias se tienen en cuenta, entre otros, los siguientes aspectos:

1. Las concepciones de los alumnos sobre los conceptos, y las variantes que se presentan.

2. El interés por ampliar contenidos y conocimientos discutidos en el aula

3. El poder reflexionar críticamente sobre lo que se le enseña, lee o escribe.

4. La participación del individuo en tareas grupales.

5. La movilización de las competencias y destrezas.

Con lo anterior se logra informar aspectos positivos que muestra el estudiante, por ejemplo: la anticipación a dar respuestas, la verificación de las respuestas, el planteamiento de otros interrogantes, todo esto en sectores del conocimiento y las temáticas tratadas.

4.1 Análisis de los resultados obtenidos

En esta primera parte se analizan, en forma general, las respuestas brindadas por los estudiantes en los diferentes momentos de las evaluaciones, con sus respectivos procesos y argumentaciones.

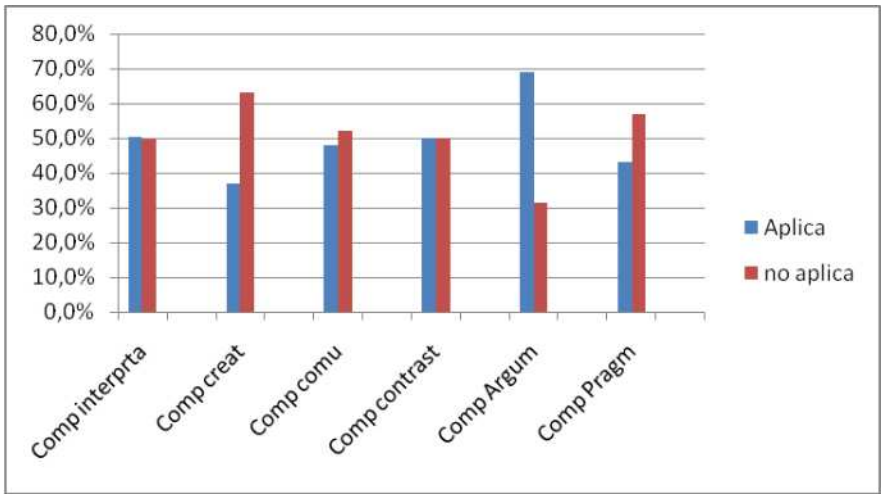
4.2 Evaluación diagnóstico

La evaluación diagnóstico 1 (ANEXO 3) contiene 12 preguntas, que evalúan las seis competencias, es importante resaltar que todas debían ser justificadas o argumentadas usando un lenguaje natural o el lenguaje matemático. Lo que implicaba la existencia de la competencia argumentativa y comunicativa en cada una de las preguntas, sin embargo, se considera la pregunta 11 como indicador de logro de esta competencia, pues permite que el estudiante utilice no solo su heurística, sino que además pueda argumentar desde su lenguaje la solución que dio al problema.

De manera similar se distribuyen las preguntas restantes, ubicándolas en la(s) competencia(s), donde de acuerdo con el equipo investigador, permitía según la respuesta dada y el proceso empleado, identificar si la competencia es aplicada por el estudiante, en el siguiente gráfico se ve, cual fue la clasificación de las preguntas para la evaluación diagnóstico.

COMPETENCIA	PREGUNTAS
Interpretativa	1,3,6,10 y 12
Comunicativa	4y 8
Creativa	5,7 y 11
Pragmática	2,5,8 y 10
Contrastativa	4 y 9
Argumentativa	11

Los resultados obtenidos son presentados en el siguiente histograma



Es importante resaltar que la prueba diagnóstico evalúo conceptos básicos de aritmética y aunque ellos argumentaron en su mayoría la pregunta 11 (indicador para esta competencia) tienen bastantes dificultades, según los resultados, para justificar y argumentar por medio del lenguaje matemático, para la prueba es requisito obligatorio justificar y argumentar cada respuesta.

4.2.1 Evaluación del proceso

La evaluación de seguimiento se realizó para tres grandes temas, los cuales se seleccionaron y diseñaron por parte del equipo investigador de acuerdo al planteamiento de tres situaciones problema; cada una desarrolla diferentes redes conceptuales, en general los temas desarrollados y evaluados con sus respectivos contenidos, son:

1. El primero comprende y evalúa el concepto de relación y de función en forma general, este contiene los siguientes temas: ecuaciones de primer y segundo grado, con una, dos y tres variables y problemas con modelos incorporados y no incorporados, propiedades de las relaciones, función uno a uno, sobre, biyectiva, función par e impar, función lineal, cuadrática y función polinómica.

Este tema es desarrollado por medio de la situación problema número 1.

(Ver anexo: 1),

2. El segundo tema permitió aplicar la teoría del primer tema en funciones particulares, por ejemplo: lineal, cuadrática, cúbica y en general la función polinómica

La tercera evaluación de seguimiento, llamado examen *parcial*, permitió registrar el porcentaje de aplicación o no aplicación, por parte del grupo experimental, de las competencias sobre los primeros dos temas.

A continuación se presenta la prueba del examen parcial y el respectivo formato de evaluación por competencias.

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

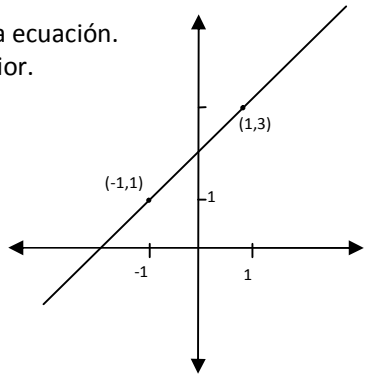
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

GRUPO SUMMA

Examen parcial

Nombre:_____Carne:_____

1. Dada la función, $y = -x^2 + 2x + 3$
   a) Realice una representación gráfica de esta función.
   b) Encuentre los interceptos con los ejes.
   c) Introduzca cambios en los valores de los coeficientes (a, b ó c) para lograr una gráfica diferente e indique el intervalo del rango para cada función.
2. En la gráfica que se presenta a continuación, se requiere:
   a) Hallar la pendiente de la recta.
   b) Encuentre la ecuación de la recta
   b) Hallar los interceptos con los ejes *x e y* utilizando la ecuación.
   c) Escriba la ecuación de una recta paralela a la anterior.



3. Seleccione y justifique la respuesta aplicando la fórmula adecuada.
   1. ¿Qué tasa de interés compuesto anual triplica el valor de una inversión después de 12 años?

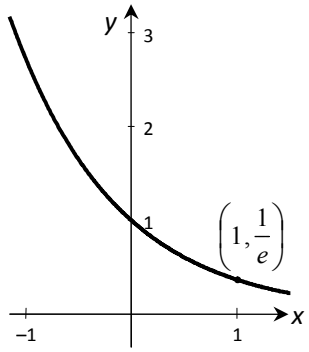
      A. 12% B. 6.6% C. 9.6% D. 9.2%

4. Hace 8 años la edad de Sandra era el triple que la de Isabel, y dentro de 4 años la edad de Isabel será los cinco novenos de la edad de Sandra. (plantee las ecuaciones y resuelva utilizando algún método)
5. Trazar la función $f(x) = 1 - 2^x$, indique su dominio y su rango.
6. Dada la ecuación: $e^{2x} = -6 - 5e^x$ aplique definiciones y propiedades para encontrar el valor de x.
7. Relacione las gráficas y las funciones dadas, justifique cada relación:

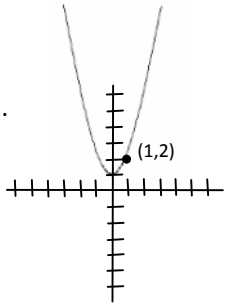
$a)\ f(x) = x^2 + 1 \qquad b)\ f(x) = \lg_{\frac{1}{3}} x \qquad c)\ f(x) = \ln x \qquad d)\ f(x) = -x + 2$

$e)\ f(x) = e^{-x} \qquad f)\ f(x) = (x+1)^2 \qquad g)\ f(x) = -\ln x \qquad h)\ y = 2$

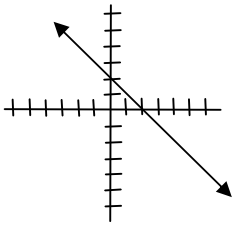
1.



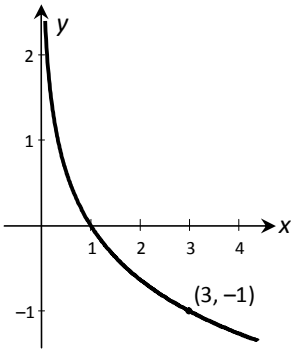
2.



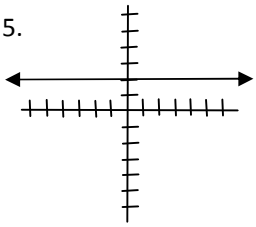
3.



4.



5.



El siguiente formato contiene los indicadores de logro, de la competencia respectiva, asignados a cada punto de la evaluación anterior, con este formato se pudo registrar como positivos, los procesos o razonamientos correctos de los estudiantes a la vez que permitieron detectar con facilidad las limitaciones o dificultades, logrando, de esta manera, evaluar cuantitativamente al estudiante.

Investigación proyecto Grupo "SUMMA"

Línea: Educación Matemática

Departamento de Ciencias Básicas

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Asunto: **f□rmat□ para registrar la evaluación parcial**

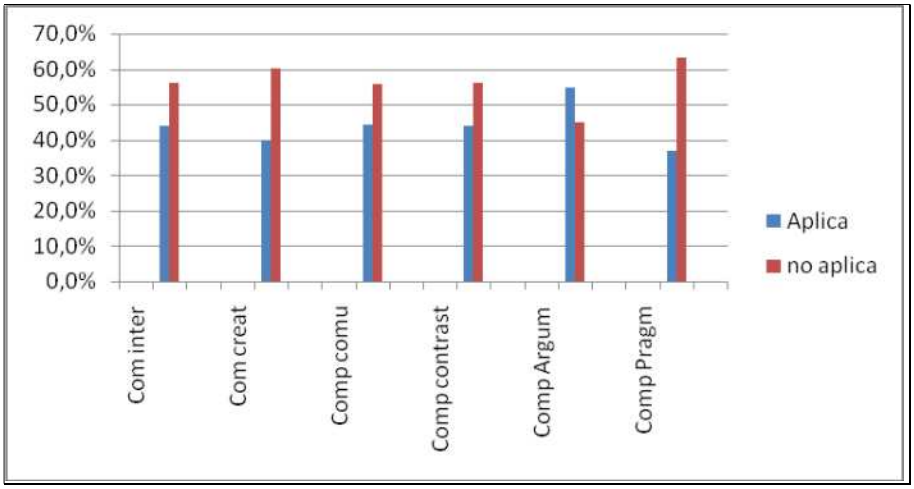
Nombre: _____

Profesor:_____

Punto	Competencia evaluada	Total	Parcial	No aplica
Primer punto	• INTERPRETATIVA.: Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico.			
	• CREATIVA: Aplica creativamente un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Segundo punto	• Acepta representaciones graficas no icónicas de las relaciones e identifica elementos desde su gráfica.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
	• Dada una grafica construye su modelo matemático.			
Tercer punto	• CREATIVA: aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Cuarto punto	• Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico.			
	• Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos (valores obtenidos) operados y relacionados.			
Quinto punto	INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: • Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico			
	1. Aplica adecuadamente un algoritmo.			
Sexto punto	• Aplica propiedades de un sistema para resolver un problema			
	• Manejo adecuado de algoritmos para resolver un			

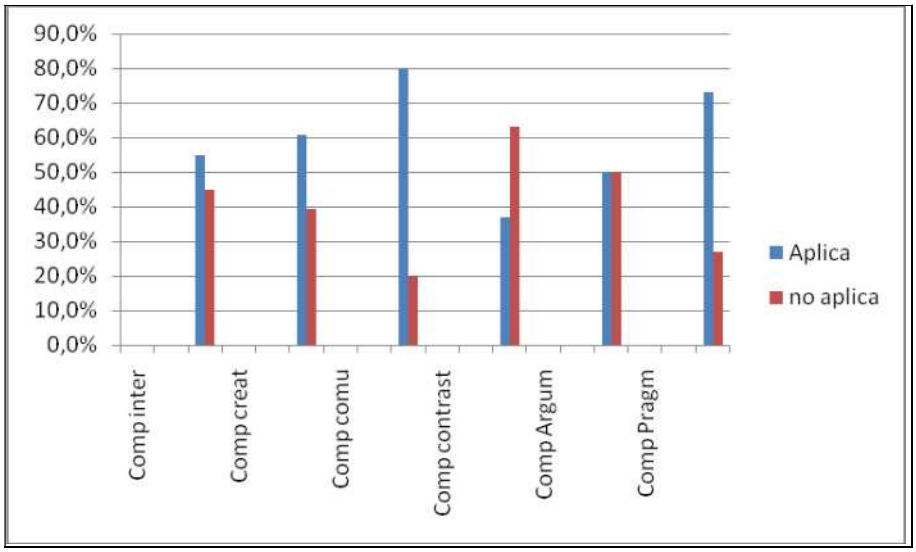
	problema			
Séptimo punto	• Dado un modelo es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su gráfica			
	• Justifica o explica las procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación.			

Según este formato de evaluación del examen parcial, para el primer punto de la evaluación anterior, se resaltan las competencias interpretativa, creativa y contrastativa, con el respectivo indicador de logro. Las respuestas, procesos y razonamientos para las otras preguntas, ofrecidos por los estudiantes, permitieron registrar la información, que de nuevo es presentada en un histograma para facilitar su interpretación.



4.2.2 Evaluación final

Evaluó la parte correspondiente a la trigonometría donde se trataron los siguientes temas: funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, ecuaciones trigonométricas, leyes del seno y del coseno y las graficas de las funciones trigonométricas, en general, todos los aspectos importantes de esta área de conocimiento. Los resultados luego de la aplicación de la prueba (Anexo 3), y su evaluación mediante el formato por competencias ha permitido registrar la siguiente información.



4.3 Análisis comparativo en diferentes momentos de la evaluación

Las estadísticas que se presentan a continuación se refieren a los registros considerados como positivos (Aplica) y los negativos (No aplica) de la presencia de las seis competencias evaluadas: Interpretativa, comunicativa, creativa, pragmática, argumentativa y contrastativa. Los porcentajes obtenidos no son porcentajes de los estudiantes sino de registro positivos en la prueba. Una ilustración del procedimiento utilizado para obtener los resultados en la prueba de *diagnóstico* está en la tabla siguiente:

ID	APLICAN	No aplica	TOTAL
P1	30	18	48
P3	15	33	48
P6	23	25	48
P10	25	23	48
P12	28	20	48
TOTAL	**121**	**119**	**240**

Se registran el número total de estudiantes que presentaron la prueba (48 estudiantes), los puntos que permitieron evaluar la competencia interpretativa en esta prueba fueron: P1,P3,P6,P10 y P12 (Anexo 3: prueba diagnóstico), y la cantidad de estudiantes que aplicaron esa competencia (30 para el punto 1) a manera de ejemplo, si los 48 estudiantes hubiesen aplicado la competencia interpretativa, en cada uno de los 5 problemas, se tendría un total de 240 registros positivos, para un 100% de logro. Pero como se puede observar el porcentaje de logro real de acuerdo con los datos de la tabla es de 121/240, lo que representa un 50.4 % de logro en esta competencia.

Para el análisis de esta competencia en la *prueba final,* se procedió de forma semejante, asignando a cada punto *los indicadores* que fueron considerados como determinantes para la competencia (ver anexo formato de evaluación por competencias para la prueba final), la tabla siguiente presenta los indicadores 1,1 y 3,1 que originaron 55 registros positivos equivalente al 55 % de logro.

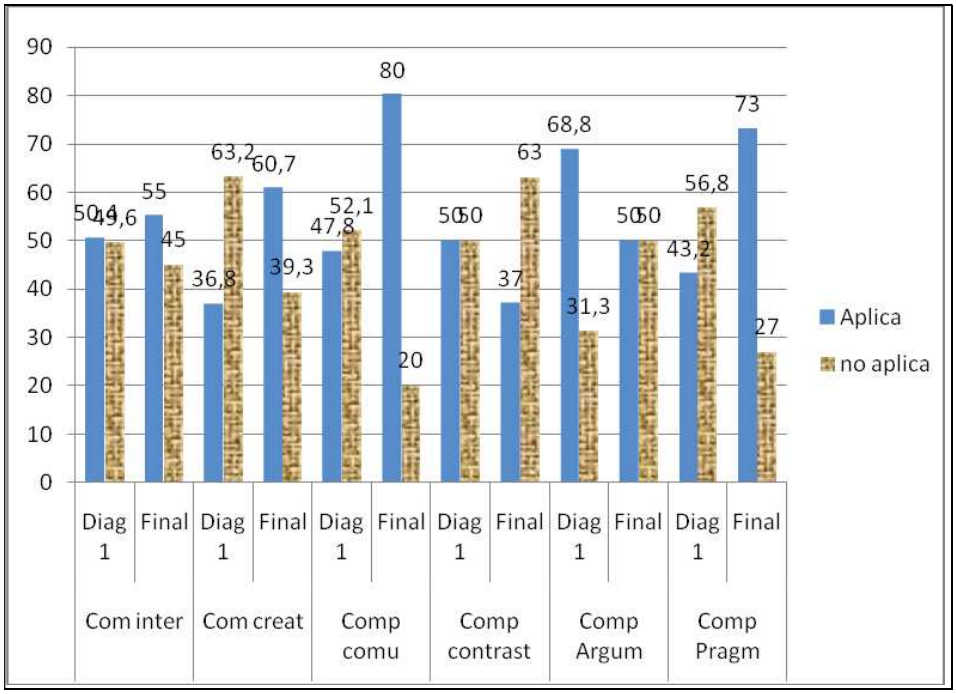
prueba	**Indicadores**	**Aplicaron**	**No aplicaron**	
Final	1,1	33	17	50
	3,1	22	28	50
	TOTAL	**55**	**45**	**100**

Con el mismo algoritmo se realizan los siguientes registros; lo que permitió analizar las diferencias horizontales de logro (aplica vs no aplica) y las diferencias verticales (cualificación del logro de la competencia, entre el estado final y el diagnóstico), así:

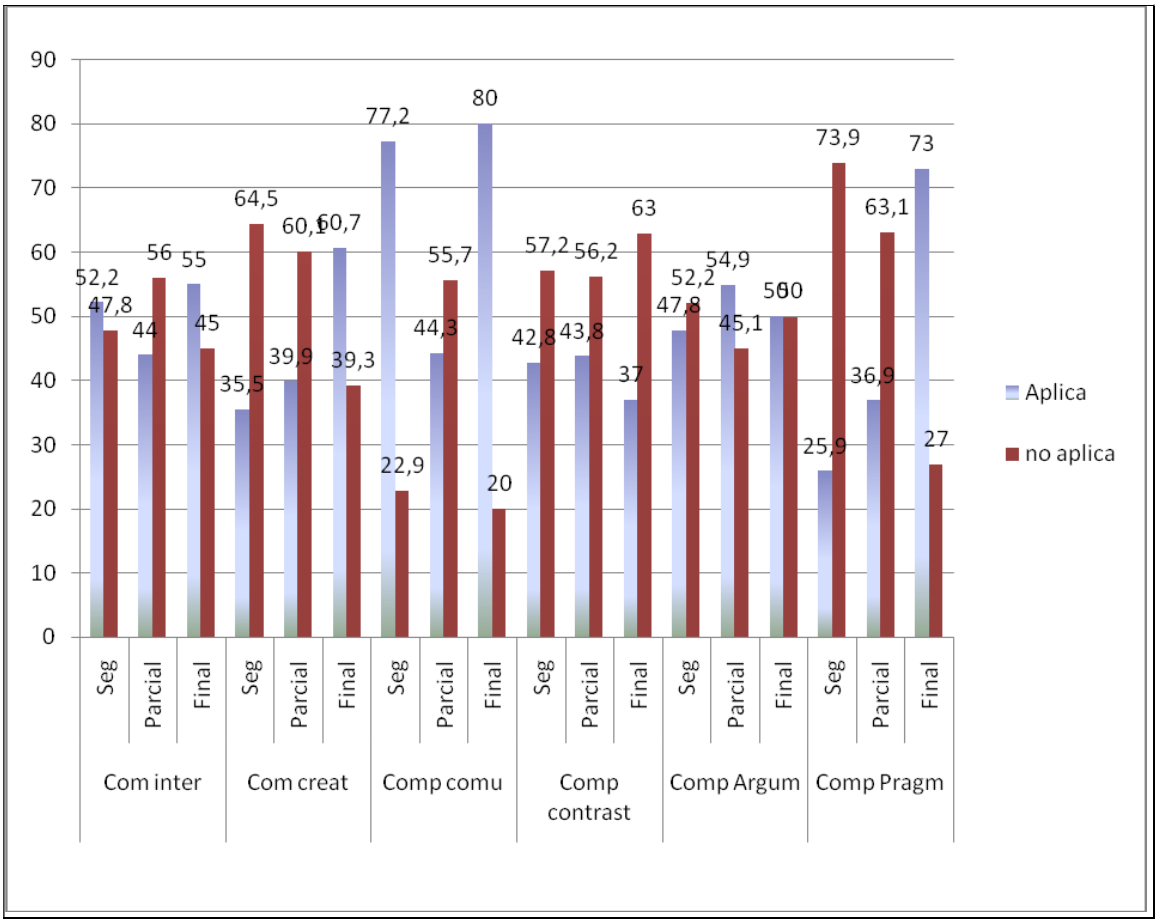
		Aplica	no aplica	Dif hor	Dif vert
Comp inter	Diag 1	50,4 %	49,6%	0,8	**4,6**
	Final	55%	45%	10	
Comp creat	Diag 1	36,8%	63,2%	-26,4	**23,9**
	Final	60,7%	39,3%	21,4	

Comp comu	Diag 1	47,8%	52,1%	-4,3	**32,2**
	Final	80%	20%	60	
Comp contrast	Diag 1	50%	50%	0	**-13**
	Final	37%	63%	-26	
Comp Argum	Diag 1	68,8%	31,3%	37,5	**-18,8**
	Final	50%	50%	0	
Comp Pragm	Diag 1	43,2%	56,8%	-13,6	**29,8**
	Final	73%	27%	46	

El histograma que contiene la información de la tabla anterior, permite visualizar las diferencias entre los porcentajes de los estudiantes que aplican y no aplican por competencia en las pruebas diagnóstico y final. Por ejemplo, en la competencia comunicativa se moviliza de manera significativa: 36.2%.



		Aplica	no aplica
Com inter	Seg	52,2	47,8
	Parcial	44	56
	Final	55	45
Com creat	Seg	35,5	64,5
	Parcial	39,9	60,1
	Final	60,7	39,3
Comp comu	Seg	77,2	22,9
	Parcial	44,3	55,7
	Final	80	20
Comp contrast	Seg	42,8	57,2
	Parcial	43,8	56,2
	Final	37	63
Comp Argum	Seg	47,8	52,2
	Parcial	54,9	45,1
	Final	50	50
Comp Pragm	Seg	25,9	73,9
	Parcial	36,9	63,1
	Final	73	27



4.4 Análisis de los resultados por competencias

4.4.1 Competencia interpretativa

1. En el diagnóstico inicial

Una vez aplicada la evaluación, los indicadores seleccionados muestran la presencia de esta competencia en un 50.4 % en la prueba diagnóstica 1. Las carencias encontradas están relacionadas con la ausencia de significación para los conceptos presentados en cada problema propuesto; sin embargo, para la casi totalidad de los estudiantes, más del 90%, fue posible subsanar las dificultades iníciales, de esta y las otras cinco competencias, a través de la aplicación del modelos de situaciones problema, el acompañamiento individual y del acompañamiento didáctico durante el desarrollo del curso.

2. En el desarrollo del curso

	Aplica
Diag 1	50,4
Eval 2	50,3
Eval 3	54,1
Parcial	44
Final	55

Seguimiento 52,2
Parcial 44
Final 55

Una vez iniciado el curso con la propuesta didáctica centrada en un modelo particular para estructurar y aplicar situaciones problema, la competencia interpretativa continúa presentando los obstáculos inherentes al aprendizaje significativo de nuevos conceptos. Es así como, durante las evaluaciones de seguimiento, la competencia interpretativa se mantiene cercana a las condiciones iníciales (con una ligera mejoría porcentual) y aún en la evaluación parcial presenta una disminución frente a la situación inicial, cualificándose en un 10% en la evaluación final. Esto se explica por los más altos niveles de complejidad presentes en los nuevos conceptos tratados; pero, al igual que con el diagnóstico inicial, la estrategia para el acompañamiento individual y grupal permitió la superación progresiva y diferencial de los obstáculos y falencias encontradas para todas las pruebas anteriores a la prueba final. Posteriormente se explicará la manera como fueron utilizados los resultados obtenidos para certificar o no a los estudiantes en el curso, en cuanto al logro de las competencias.

4.4.2 Competencia creativa

1. En el diagnóstico inicial

Cuando el estudiante selecciona, por él mismo, un procedimiento o algoritmo para resolver un problema se asignó un registro positivo para la presencia de la competencia creativa. En el diagnóstico 1, el porcentaje de registros positivos fue 36,8%. Esta es una de las competencias cuya cualificación se esperaba lograr mediante el cambio didáctico basado en el modelo de situaciones problema. La

capacidad decisiva sobre cómo resolver un problema informa sobre un aprendizaje no mecánico por parte de los estudiantes.

2. En el desarrollo del curso

La secuencia de porcentajes muestra tanto las dificultades como la eficiente superación en la prueba final para movilizar esta competencia. Las situaciones propuestas para el trabajo individual de los estudiantes, por fuera del aula y la socialización que estos hacían de sus trabajos frente al grupo, realimentaban la toma de conciencia sobre las condiciones y posibilidades de los problemas. De alguna manera, la prueba final da cuenta de los logros alcanzados, después de mucho ensayo y error en la búsqueda de respuestas para las situaciones consideradas.

valores en porcentajes		
Creativa		
Aplica	no aplica	No present
36,8	63,2	16,7
39,9	60,1	19,1
31,2	68,8	21,7
39,9	60,1	25,5
60,7	39,3	12

Seguimiento	35,5
Parcial	39,9
Final	60,7

4.4.3 Competencia comunicativa

1. En el diagnóstico inicial

Esta competencia fue considerada en la relación, fundamentalmente semántica, entre los lenguajes naturales y los lenguajes específicos de los conceptos matemáticos. El

porcentaje de registros positivos en el diagnóstico inicial fue de 47,8%. Esta competencia posee dificultades adicionales para su interpretación; es posible que algo que comprendemos no lo podamos comunicar, parcial o totalmente, debido a la ausencia de un lenguaje necesario para la comunicación exterior, pero, por otra parte, es posible que poseamos un leguaje para la comunicación exterior sin que comprendamos lo que decimos (aprendizaje fundamentalmente memorístico de expresiones sin sentido para nosotros).

Fue muy sorprendente detectar el rápido cambio cualitativo de esta competencia a través de la práctica continua de actividades matemáticas discutidas en su significado y sentido y, su disminución cuando la dificultad de los problemas la bloqueaba (evaluación parcial). Lo ocurrido en el proceso es lo siguiente:

2. En el desarrollo del curso

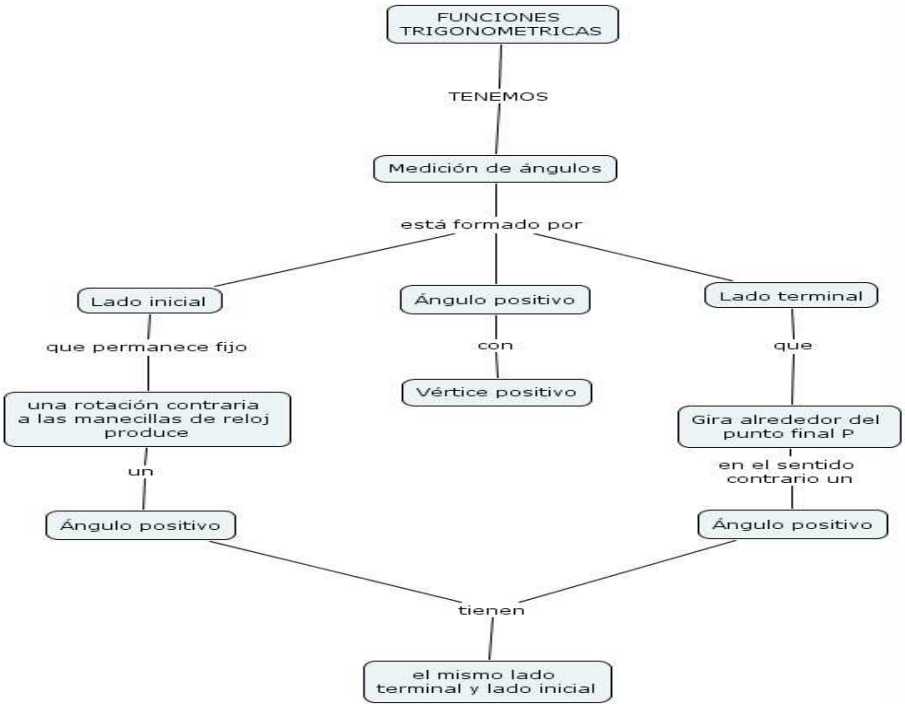
	valores en porcentajes		
	Comunicativa		
	Aplica	No aplica	No present.
Diag 1	47,8	52,1	16,7
Eval 2	89,4	10,6	19,1
Eval 3	64,9	35,1	21,7
Parcial	44,3	55,7	27,4

Seguimiento	77,2
Parcial	44,3
Final	80

Es importante comparar estos resultados con los obtenidos en la competencia argumentativa que, además de comunicar exige la validación, con cualquier argumento, de lo que se comunica.:

4.4.4 Los mapas conceptuales y la competencia comunicativa

En las diferentes etapas de la evaluación se aplicó la técnica de los mapas conceptuales, primero como mapa cognitivo[13], donde el estudiante evidencia los conceptos que tiene en su estructura cognitiva y la forma como los relaciona; con esta actividad el estudiante toma conciencia de sus conocimientos previos antes de la intervención que hará el docente, a continuación se presenta el primer mapa conceptual diseñado por un estudiante; se le pidió que lo diseñará con los conceptos: trigonometría, funciones trigonométricas y ángulo, considerados términos *inclusores*[14] . Este mapa fue seleccionado, porque es representativo, ya que la mayoría de los estudiantes presentaron mapas similares.



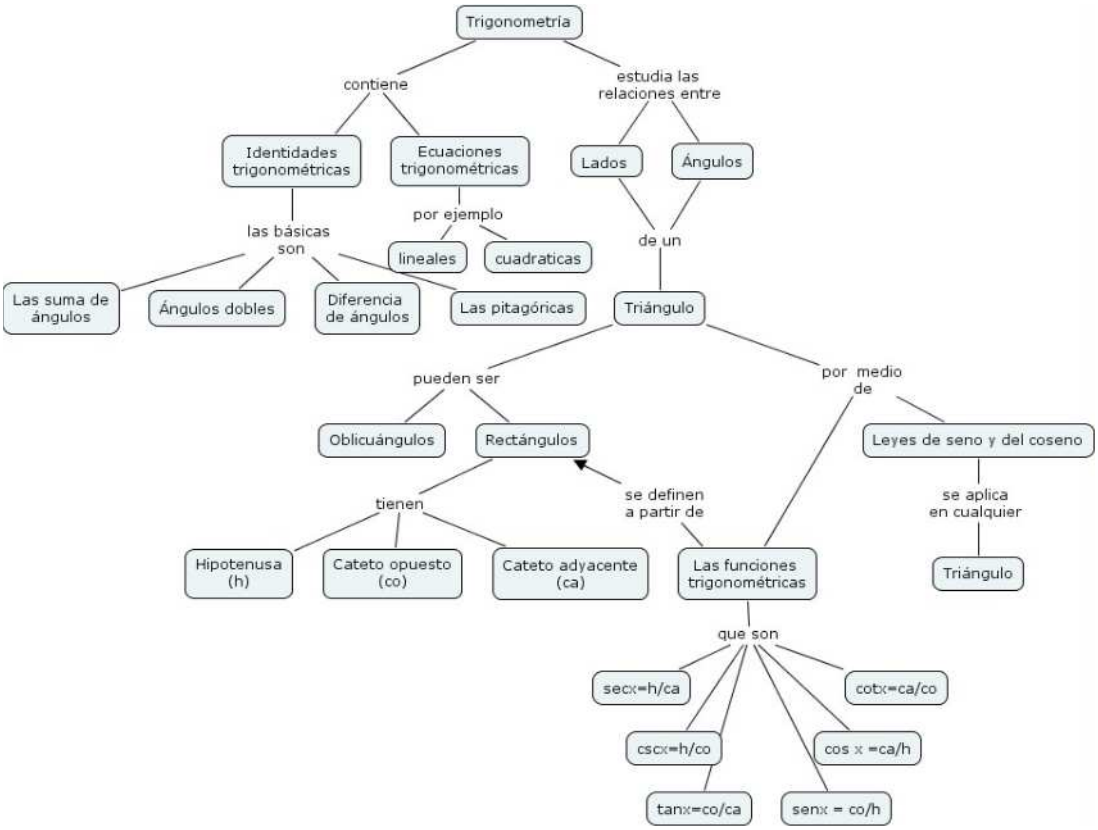
Como puede verse el estudiante presenta y relaciona, tiene varias dificultades, primero sólo el concepto de función trigonométrica, el de ángulo y algunas de sus propiedades, y no considera importante o, tal vez no tiene claridad en definir, por ejemplo, las

[13] Mapa cognitivo: "es el término con el cual designamos la representación de lo que creemos que es la organización de los conceptos y proposiciones en la estructura cognitiva de un estudiante determinado" (Novak, 1999: 158).

[14] Ontoria en su texto: **Los mapas conceptuales-** una técnica para aprender, define citando a Ausubel el término *inclusor* como las ideas o conceptos relevantes que posee el alumno en su estructura cognitiva y con los que relaciona nuevos elementos.

funciones trigonométricas, sus aplicaciones, las ecuaciones, las identidades,…entre otros. Por otro lado el alumno propone los conceptos lado inicial y el lado terminal como elementos que conforman la medición de ángulos y no como elementos que, por su jerarquía, deben estar debajo del concepto de ángulo, finalmente no construye relaciones cruzadas pues con ellas dan indicio de integraciones conceptuales nuevas. Lo anterior implica que el mapa conceptual realizado por el estudiante debe ser reformulado[15] pues omite conceptos relevantes.

En segundo momento, luego de aplicar el modelo de situación problema, se le pide al grupo el diseño de un mapa conceptual consensuado; *Ontoría y otros*[16] propone: no extraño que los alumnos elaboren mapas muy distintos para la misma temática , pues el aprendizaje es una experiencia que se vive de manera individual, sin embargo el conocimiento puede ser compartido y así los significados propios del conocimiento presentan la posibilidad de ser intercambiados e incluso negociados con otro compañeros.



[15] La expresión *debe ser re-formulado* según Bedoya , J y Vasco , E. Debe entenderse como; debe ser nuevamente construido a la luz de algunas experiencias de aprendizaje presentadas por el docente.(Tesis de maestría).Universidad de Antioquia. Pag 102

[16] Ontoria en su texto: **Los mapas conceptuales-** una técnica para aprender. Pag 57

En la figura anterior los estudiantes diseñaron un mapa consensuado en el cual se incluyeron conceptos de uno u otros estudiantes, aquí aparecieron las diferentes concepciones y la manera como los estudiantes aprendieron los diversos conceptos, con esta actividad se logra que le alumno se implique en las tareas, trayendo consigo la manifestación explicita (comunicación: pues debe argumentar ante sus compañeros sus ideas) de los contenidos de acuerdo a las experiencias cognitivas anteriores

4.4.5 Competencia argumentativa

1. En el diagnóstico inicial

El porcentaje inicial fue de 68,8%, porcentaje que disminuyó y nunca fue superado durante el proceso.

2. En el desarrollo del curso

valores en porcentajes		
Argumentativa		
Aplica	no aplica	No present
68,8	31,3	16,7
52,8	47,2	19,1
42,8	57,2	21,7
54,9	45,1	25,5
50	50	12

Seguimiento	47,8
Parcial	54,9
Final	50

La explicación de este hecho se encuentra en la complejidad de los conceptos que se trabajaron en el curso. Muchas actividades eran innovadoras para los estudiantes lo que los concentraba más en buscar respuestas que en explicarlas. No se considera, en esta investigación, la aplicación de procesos lógicos en el desarrollo de algoritmos como una parte de la competencia argumentativa (hubiese tenido sentido), para dejar

esta competencia como contrastativa, por el peligro de confundir la aplicación mecánica de reglas con la competencia argumentativa.

4.4.6 Competencia contrastativa

1. En el diagnóstico inicial.

Cuando el estudiante aplica un procedimiento o algoritmo para resolver un ejercicio o un problema, es necesario que verifique sus procedimientos con sus reglas para examinar si la aplicación estuvo correcta y si tiene sentido la respuesta obtenida. Aquí se encontraron unos datos que muestran una tendencia similar a la ocurrida con la competencia argumentativa.

Registros positivos en el diagnóstico inicial: 50%

2. En el desarrollo del curso.

	Contrastativa		
	Aplica	No aplica	No present
Diag 1	50	50	16,7
Eval 2	53,7	46,3	19,1
Eval 3	31,9	68,1	21,7
Parcial	43,8	56,2	25,5
Final	37	63	12

Seguimiento	42,8
Parcial	43,8
Final	37

Aún en los casos en donde los estudiantes respondieron correctamente a los problemas o ejercicios, no predomina el interés por verificar lo que han hecho.

4.4.7 Competencia pragmática

1. En el diagnóstico inicial.

El porcentaje de registros positivos 43,2%, da cuenta, para los investigadores, de la competencia para aplicar conceptos en la resolución particular de problemas (competencia de uso). Se esperaba, y así ocurrió, que se manifestara ostensiblemente su cualificación durante todo el proceso.

2. En el desarrollo del curso.

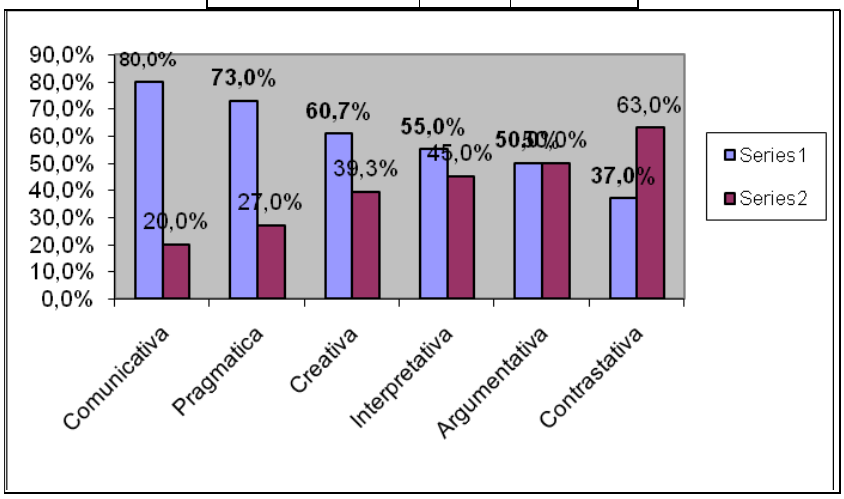
Seguimiento	25,9
Parcial	36,9
Final	73

El porcentaje del seguimiento y del parcial aparecen altamente disminuidos con relación al diagnóstico inicial, pero esto se explica por el tipo nuevo de actividad matemática propuesto (situaciones problema). Lo que importa, en este caso es el resultado final, luego de haber practicado variados y complejos problemas, en el contexto del primer semestre.

4.5 Análisis comparativo para la situación entre las competencias.

GRUPO EXPERIMENTAL examen final		
Competencia	Aplica	no aplica
Comunicativa	80,0%	20,0%

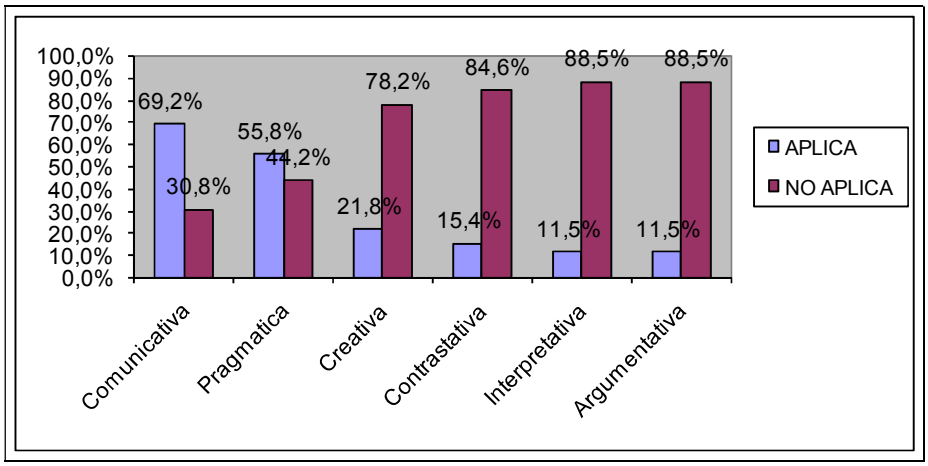
Pragmática	73,0%	27,0%
Creativa	60,7%	39,3%
Interpretativa	55,0%	45,0%
Argumentativa	50,0%	50,0%
Contrastativa	37,0%	63,0%



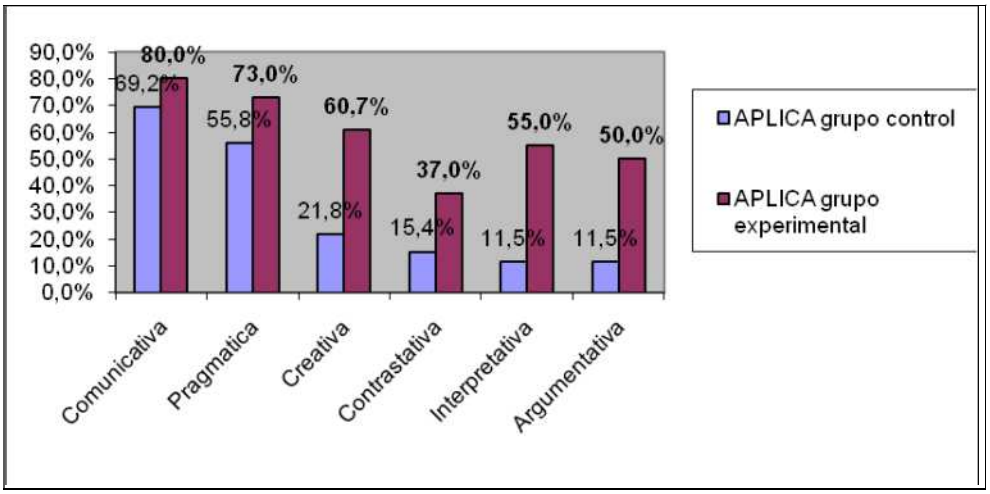
4.6 Análisis comparativo con el grupo control

GRUPO CONTROL examen final		
COMPETENCIA	APLICA	NO APLICA
Comunicativa	69,2%	30,8%
Pragmática	55,8%	44,2%
Creativa	21,8%	78,2%
Contrastativa	15,4%	84,6%
Interpretativa	11,5%	88,5%

Argumentativa	11,5%	88,5%



COMPETENCIA	APLICA grupo control	APLICA grupo experimental
Comunicativa	69,2%	80,0%
Pragmática	55,8%	73,0%
Creativa	21,8%	60,7%
Contrastativa	15,4%	37,0%
Interpretativa	11,5%	55,0%
Argumentativa	11,5%	50,0%



La tabla de comparación entre los dos grupos, considerando los porcentajes de registros positivos, hace evidente las diferencias a favor del grupo experimental. Ninguna de las competencias evaluadas fue superada por el grupo control.

4.7 Criterios para la certificación de los estudiantes.

De acuerdo con el modelo de evaluación propuesto por el profesor Orlando Mesa Betancur, la evaluación siempre se acogió como una acción propositiva, es decir, la interpretación del estado de las competencias en cada estudiante obligaba a una intervención para cualificar ese estado, no importando las situaciones de error sino para luchar por la superación de ellas. Únicamente después de la prueba final se tomó la decisión sobre los estudiantes que no podían ser certificados por no haber alcanzado los niveles básicos definidos por el grupo de investigación. Para estos niveles se determinó aceptar, como criterio de aprobación de curso, la presencia de 4 competencias, como mínimo, de las 6 evaluadas.

5 CONCLUSIONES

1. La metodología de modelos de situaciones problema para la movilización de competencias matemática, en el contexto propuesto y para la población estudiantil objetivo, ha sido determinante para reducir los niveles de deserción y pérdida; ello obedece en gran parte a la motivación de los estudiantes por el trabajo académico por competencias previamente definidas y por los procesos de evaluación cualitativa referida a los logros de cada una de ellas; en parte este hecho se explica por el interés de los estudiantes por llegar al mayor número de logros sin estar supeditados a la obtención de una nota cuantitativa.

   Si se hace un comparativo de los grupos piloto con los de control se evidencia en los primeros una gran reducción del número de estudiantes que no califican para efectos de certificación y la deserción casi desaparece; en los segundos por registros históricos consignados en el Departamento de Ciencias Básicas, este problema conjunto que justamente es el que se trata de intervenir, alcanza niveles que están entre el 40% y el 50% del total de los estudiantes que inician el curso de Álgebra y trigonometría.

2. El trabajo con situaciones problema ha logrado la cualificación de los estudiantes en cuanto a la identificación, significado y apropiación de las competencias; desde este punto de vista se nota las habilidades para comunicar y argumentar no sólo en el discurso matemático sino también al que hace referencia al lenguaje natural utilizado en el accionar cotidiano.

   Desde el punto de vista anterior, la alusión a las competencias, que en matemáticas, tienen que ver con la interpretación, creación, comunicación, argumentación de discursos matemáticos se incorporan al lenguaje de los estudiantes como parte de su proceso de aprendizaje, así por ejemplo, algún estudiante identifica a través de los indicadores de logro que interpreta resultados de una manera efectiva pero que le faltan habilidades para comunicar u operar frente a determinados eventos matemáticos particulares y, va más allá cuando frente al planeamiento de un tema nuevo a tratar él identifica, de entrada, las competencias que se quieren privilegiar.

3. La calidad del conocimiento adquirido al lograr la movilización de competencias teniendo como referente el modelo de situaciones problema, parte del hecho que no puede promediarse ignorancia con conocimiento, como se observa, en lo que a evaluación se refiere, en los métodos tradicionales de aprendizaje. El trabajo por competencias tiene sentido si el estudiante obtiene logros de competencias escalonados que se encadenan satisfactoriamente a sus procesos de elaboración de conocimiento; en este sentido se da la posibilidad al estudiante de tener el menor número de baches o lagunas en elementos fundamentales que no le permitan lograr su cometido; sin embargo frente a esta situación de contingencia, y el modelo lo permite, el estudiante no puede continuar mientras los indicadores de logro no muestren el alcance de alguna competencia en particular, que es lo que finalmente se certifica.

4. Un factor importante para que se produzca la comprensión de un concepto es el interés por un determinado tema. La escogencia del motivo para el planteamiento de una situación problema, permite que el estudiante se apropie del problema y le vea más sentido al aprendizaje desde el punto de vista de su significado.

   Es cierto que quizás está no sea una condición necesaria, pero sin embargo la falta de interés es un serio obstáculo para alcanzar la comprensión. Lo que implica que el docente debe profundizar en la motivación de la materia teniendo cuidado de no confundir esta afirmación, con el hecho de que resulte atractivo el requerir poco esfuerzo mental, pues esto no favorece la aparición de la comprensión.

5. Es importante recalcar la actitud por parte de los alumnos del grupo piloto, con ellos se desarrolló el trabajo en un ambiente de amistad, ellos asistieron de manera voluntaria a curso, y las situaciones problema se les proponían para luego ser discutidas, además durante el trabajo cada uno de los alumnos era escuchado con sumo cuidado, lo cual los motivaba a seguir insistiendo en tratar de transmitir lo que ellos pensaban y en hacer explícitas sus inquietudes. Con lo anterior se quiere decir que no se le puede forzar a un alumno a realizar operaciones mentales por muy capacitado que esté, es necesario que quiera alcanzar comprensión y que no sea una consecuencia de una resistencia vencida. Aunque no se puede asegurar, que una vez obtenida la motivación y cooperación del alumno se le pueda trasplantar directamente la comprensión, al menos si se le puede ayudar para que lo logre.

6. La metodología de modelos de situaciones problema para la movilización de competencias matemática, en el contexto propuesto y para la población estudiantil objetivo, ha mostrado una alternativa válida para romper la implementación tradicional, e instrumental, de la linealización temática de los currículos en las aulas de clase. Los temas abordados para la asignatura de Álgebra y Trigonometría fueron incorporados de acuerdo a las necesidades y motivaciones de los estudiantes, mediadas por sus experiencias significativas previas y las situaciones problemas planteadas. Bien importante este hecho, porque da un aporte a la posibilidad de romper con la tradición de planear los currículos de las asignaturas, desde una sistematización secuencial y progresiva de contenidos, que más de las veces va encontravía, de su implementación, de la génesis y surgimiento histórico de los conceptos, sus contextos, la holisiticidad de los modelos y estructuras matemáticas y su consecuente relación con las otra disciplinas.

7. Una de las grandes limitaciones iníciales con las que el equipo investigador se encontró al implementar este éste tipo de metodologías, fue el reto de romper culturalmente con las estructuras de los estudiantes y profesores, que con el tiempo y la tradición, han instalado e incorporado en los procesos de enseñanza y aprendizaje; sin embargo el trabajo de sensibilización, la autonomía y libertad en la toma de decisiones otorgadas a estudiantes y profesores, que participaron en el del proyecto, fueron definitivas para mediar y salvar la situación, convirtiéndose en uno de los mayores logros.

   No obstante pretender implementar la metodología en una gran cantidad de grupo simultáneamente, exige una alta cualificación previa de los docentes en el diseño de situaciones problema.

8. El equipo investigador confiesa, la dificultad para crear y diseñarlas situaciones problema, pues en el contexto en que son enunciadas y formalizadas, no surgen por generación espontánea, requieren de trabajo dispendioso, colaborativo, de construcción y diseño colectivo.

6 BIBLIOGRAFÍA

[1]. Acta fundacional. Universidad de Medellín.

[2]. ÁLVAREZ, Rafael, et al. Matemáticas Previas al Cálculo. Medellín: Sello Editorial U. de M. primera edición, 2005.

Antioquia

[3]. ARYA, Jagdish. Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Editorial Prentice Hall. Tercera edición.

[4]. AUSUBEL, D. et al Psicología educativa. México: Trillas, 1991. P. 70-71.

B. Besio y José Benfi. Editorial Espasa, Madrid 1963. P. 32

[5]. BEDOYA, J y Vasco, E. Diseños de Módulos de Instrucción para el concepto del modelo de van Hiele para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje. Tesis de maestría, mayo de 2005. Universidad de

[6]. ESLAVA, María Emilia. Matemáticas Universitarias. Editorial Mc. Graw Hill.

[7]. GARCÍA, Barreiro Álvaro: *¿Qué es Ciencia Cognitiva?*, Internet, 1997.

[8]. GODINO, J. D. (1996). Significado y comprensión de los conceptos

Grijalbo, Barcelona, 1980. P. 103. Traducción castellana de Víctor Sánchez Zavala.

la matemática. Departamento de Matemática, Purdue University West Lafayette, Indiana 47907-1395 EE.UU. Unesco, encuentro internacional *matemática*. Coloquio de matemáticas, Bogotá, Noviembre de 1989. P. matemáticos. En, L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th

[9]. MAYA, Arnobio, DÍAZ, Nohora. Mapas conceptuales, elaboración y aplicación.

Bogotá D. C: Retina, 2002, p.21.

[10]. MESA B, Orlando. Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Instituto de Educación no formal—Centro de Pedagogía Participativa, 1998. P. 9.

[11]. MILNER, Fabio Augusto: La formación docente y la enseñanza en el área de

[12]. MORENO Luis y SACRISTÁN Ana: Representaciones conceptuales y procesos

[13]. NOVAK, Joseph, GOWIN, Bob. Aprendiendo a aprender. Martínez Roca, 1999. P.24.

[14]. ONTORIA PEÑA, Antonio et al. Mapas conceptuales. Una técnica para aprender. Madrid: Narcea, 1999. P. 22.

[15]. PEDRO D. Lafourcade**:** Evaluación de los aprendizajes, Internet,1999.

[16]. PIAGET, J y E. W. Beth. Epistemología matemática y psicología. Barcelona: Grijalbo, 1980. P. 103. Traducción castellana de Víctor Sánchez Zavala.

[17]. PIAGET, J.: La equilibración de las estructuras cognoscitivas (trad. cast.).,

PME Conference (Vol 2, pp. 417-424). Valencia

[18]. POINCARE, H. *La Ciencia y la Hipótesis*. Traducción del Francés por Alfredo

recursiv□*s*. Internet, 1998.

[19]. SCHMELKES, Sylvia: La evaluación de los centros escolares,

[20]. SEGURA, Dino. Algunas observaciones sobre la enseñanza de la

Siglo XXI, México,1979 p. 40.

sobre formación y capacitación docente y didáctica de las áreas

[21]. STEWART, James. Precálculo. Editorial Thomson. Tercera edición.

tematicas, La Plata, 28 de Abril de 1998.

7 ANEXO 1: SITUACIONES PROBLEMA SELECCIONADAS

Este anexo contiene dos situaciones problema de las estudiadas y propuestas por el profesor Orlando Mesa B. y que han sido seleccionadas por el equipo investigador, la primera desarrolla como red conceptual los polinomios y las relaciones matemáticas y las ecuaciones con sus distintas formas de representación, la segunda desarrolla inecuaciones y desigualdades.

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
GRUPO SUMMA-

*7.1 **SITUACION PROBLEMA 1:** FUNCIONES POLINÓMICAS Y ECUACIONES*

Una función P de **R** en **R** definida por $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Donde $a_0, a_1, a_2 ... a_n$ son números reales se denomina una **función polinomial** real. Dentro de las funciones polinómicas, estudiaremos algunas muy especiales como la función lineal y la función cuadrática, con sus respectivas ecuaciones asociadas.

Funciones y Ecuaciones Lineales

Significado de la función lineal $\rightarrow$ $f(x) = y = mx + k$
Modelos: $y = mx, \quad m \in R \quad m \neq 0, \quad y = x \qquad y = k$ comparación.
Significación de los parámetros $m \wedge k \quad en\ el\ \mathrm{mod}elo \quad y = mx + k$

Motivo inicial. Análisis de los gastos fijos en una residencia de estrato dos.

Situación problema:
Supongamos una familia que paga un arrendamiento mensual de $300.000 desde el primero de enero hasta el 31 de diciembre; además paga un promedio mensual de $120.000, por servicios (agua, luz, teléfono y varios). Cuatro miembros de la familia viajan dos veces diarias en bus, durante cinco días en la semana (el valor de cada pasaje son $1000) Dos personas reciben salarios de $450.000 y $600.000.

Preguntas iniciales:

1. ¿Cuánto dinero gastan mensualmente por los motivos citados? ¿cuánto diario, si no salen de la casa ni los sábados ni los domingos?
2. ¿De cuánto dinero disponen, mensualmente, para otros gastos?
3. La madre administra el dinero y lleva un registro diario de lo que entrega a las personas que viajan: pasajes y $5.000 para los que trabajan y pasajes más $2.000 para quien estudia. Represente en una tabla el dinero acumulado desde el día 1 hasta el día 5.Encuentre una fórmula para que la madre sepa cuanto lleva gastado en el día **n**.

4. ¿Cómo podemos representar en una gráfica los gastos acumulados, día a día hasta el día 25?
5. Si la madre reservó el dinero del arrendamiento y los servicios, modifique la fórmula anterior para que incluya este hecho. ¿Cómo se modifica la gráfica?
6. ¿Puede encontrar un modelo para representar la compra de **n** productos a un mismo precio **c**?

Ecuaciones

Se llaman ecuaciones a igualdades que representan proposiciones abiertas en las que aparecen número y letras (incógnitas) relacionados mediante operaciones matemáticas. Por ejemplo: $4x - y = x^2 + 1$

Ecuaciones con una incógnita

Son ecuaciones con **una incógnita** cuando aparece una sola letra (normalmente la x).

Por ejemplo**:** $x^2 + 1 = x + 4$

Se dice que son de **primer grado** cuando dicha letra no está elevada a la potencia 1.

Ej.**:**

$a)\ x - 3 = 2 + x \qquad b)\ \frac{x}{2} + x = 1 + \frac{3x}{2} \qquad c)\ 1 - 3x = 2x - 9 \qquad d)\ 3(x-1) = 4 - 2(x+1)$

En el primer caso se obtendrá la expresión **0 = 5** y en el segundo **0 = 2**. ¿qué significa? Desde luego ambas expresiones no pueden ser ciertas independientemente del valor que tome x. Decimos que en estos casos *la ecuación no tiene solución.*

Ecuaciones con infinitas soluciones

Ejercicio: Resuelva las siguientes ecuaciones: $a)\ 2x - 1 = 3x + 3 - x - 4 \qquad b)\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$

Ahora habrá llegado en ambos casos a la expresión 0 = 0 ¿qué significa ahora?. La igualdad que has obtenido es cierta pero se ha eliminado la x. ¿Cuál es la solución?
Si la igualdad es cierta, seguro, *¡lo será para cualquier valor de x*!

Ecuación lineal con dos incógnitas

Se llama ***ecuación lineal*** con dos incógnitas a cualquier expresión de la forma: $ax + by = c$ donde $x \wedge y$ son las incógnitas y las letras $a, b \wedge c$ son parámetros. Podemos expresar **y** en función de **x**, aplicando las reglas básicas de las cuatro operaciones y obtenemos (con b $\neq$ 0):

$$y = \frac{c - ax}{b} \Leftrightarrow \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}, llamando$$

$$m = \frac{-a}{b}; \cdots k = \frac{c}{b}, entonces$$

$$y = mx + k$$

Luego, asociada a toda ecuación lineal, existe una función lineal *y=f(x)*.
La gráfica de la ecuación es la recta asociada a su función (de aquí el nombre de la ecuación). Por ejemplo, la ecuación: $2x - y = 3 \Leftrightarrow y = 2x - 3 \qquad m = 2 \qquad k = -3$

Puede graficarse asignando varios valores a **x** y calculando los valores respectivos de **y** pero, como para determinar un recta sólo se requieren dos puntos, se acostumbra

encontrar los puntos donde la recta cortará a los ejes **X** e **Y**, mediante el siguiente procedimiento:

a) Con x = 0 obtenemos el intercepto ó corte de la curva con el eje Y, es decir, el punto $P_1(0, c/b)$. En el ejemplo $P_1(0,-3)$.
b) Con y = 0 obtenemos el intercepto ó corte de la curva con el eje X; es decir el punto $P_2(c/a,0)$. En el ejemplo $P_2(3/2,0)$.
Ejercicios (en un mismo plano cartesiano) grafique las rectas: $y = x,\quad y = 2x\quad y = 3x\quad y = -x\quad y = -2x\quad y = -3x$ ¿cómo se modifica la gráfica de y=x cuando cambia el coeficiente de x? Observe que las funciones lineales anteriores corresponden a las ecuaciones paramétricas: $y - x = 0,\quad y - 2x = 0\quad y - 3x = 0\quad y + x = 0\quad y + 2x = 0\quad y + 3x = 0$

La función *identidad: y = x*

Se denomina función ***identidad***, ya que a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas, es decir, que las dos coordenadas de cada punto son idénticas (1,1), (2,2), (3.5, 3.5),...
Observe las gráficas de la función ***identidad*** y las funciones múltiplos de x, es decir, $y = mx$ indique qué observa?
Ejercicio:
Analice las gráficas del modelo $y = mx + k$ cuando no cambia la ***m*** pero cambia ***k***. (haga k = 1, 2, 3, -1, -2 -3).

Pendiente de una recta

El parámetro **m** determina la inclinación de la recta con respecto al eje **X**. Es llamado "pendiente de la recta"
Ejercicios:
¿Cómo es la ***pendiente*** de una función ***lineal*** que pasa por el punto (4,6)? ¿positiva ó negativa? Idem con (7,6); (-3,-4); (-5,9); (4,-8); (4,-100); (10,10); (-7,-7); (0,3); (0,-5)... Indique cuándo es positiva la ***pendiente***, cuándo es negativa y cuándo es cero.

Elija una función lineal y comprueba que la ***pendiente*** de la recta asociada es el cociente entre la ***ordenada*** y la ***abscisa*** de cualquier punto distinto del ***origen*** de coordenadas: ***m = y/x***
Compare las funciones lineales que tienen pendientes opuestas 1 y -1; 2 y -2; 3,5 y -3,5, etc. ¿Qué simetrías presentan?

Represente las funciones: *y = 3* **;** *y = 5* **;** *y = ¼* **;** *y = -2* **;** ... y responda a las siguientes preguntas:

¿Qué recta representa la función *y = 0*? La función constante: y=K
¿Qué características tienen todas las rectas que representan funciones ***constantes***? ¿Cómo son entre sí esas rectas? ¿En qué punto cortan al ***eje de ordenadas***?
¿Qué características tienen todas las rectas que representan funciones ***constantes***? ¿Cómo son entre sí esas rectas? ¿En qué punto cortan al ***eje de ordenadas***?

El parámetro ***k*** es el intercepto de la recta con el eje **Y**. El punto de intercepción es el punto (0, k)

El parámetro ***k*** se llama ***ordenada en el origen*** de la función ***afín*** porque indica el valor de la función cuando ***x*** vale cero.

Representación de la ***pendiente*** de una recta

Dada la función: $y = mx + k$ Si se aumenta en una unidad el valor de x, la función se incrementa en el valor de la pendiente.

Ejercicio:

Verifique la afirmación anterior para la función $y = 2x + 1$

La ***pendiente*** es el valor que aumenta o disminuye la función cuando la ***x*** aumenta una unidad.

Ejercicio:
Compruebe que todas las rectas que son paralelas entre sí tienen la misma ***pendiente***.

Grafique la recta 2x - y = 3 y la recta 4x - 2y = 6 ¿Qué ocurrió?
Grafique la recta 2x - y = 3 y la recta 3x - 2y = 1 ¿ En qué punto se cortan?
2x - y = 3 y la recta 4x - y = 3 ¿Qué ocurrió?
Si m = 0, el modelo **y** = *m***x** + *k* se transforma en **y** = K, para todo x. ¿Cómo serán la gráficas de las rectas del modelo **y** = K?
¿Cuál será el modelo de ecuación para las rectas paralelas al eje **Y**?

Ecuaciones equivalentes

Cuando todos los términos de una ecuación se multiplican por un mismo número real *f* obtenemos una ecuación equivalente, como en el ejercicio "1" anterior. En donde la segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicando todos sus términos por 2.

En general los modelos $a_1x + b_1y = c_1$ y $a_2x + b_2y = c_2$ son equivalentes si los coeficientes están en relación de proporcionalidad directa: $a_2=fa_1 \Leftrightarrow b_2=fb_1 \Leftrightarrow c_2=fc_1$
Luego:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = f$$

Este concepto es útil para transformar ecuaciones durante los procesos de solución de sistemas de ecuaciones, como veremos a continuación.

Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama ***sistema de ecuaciones*** lineales con dos incógnitas a un conjunto de dos o más ecuaciones lineales, en este caso con dos incógnitas, por ejemplo:
$a)\ 2x + 3y = -9 \qquad b)\ x + y = 0 \qquad c)\ 4x - y = 5$
Su representación gráfica será, por tanto un conjunto de rectas, una por cada ecuación.
Ejercicios:

1. Grafique las tres rectas en un mismo plano.
2. Seleccione las parejas de ecuaciones cuyas gráficas tienen un punto en común.
3. Grafique el sistema: $a)\ 2x + 3y = -9 \qquad b)\ 4x + 6y = 2$ ¿Qué características tienen estas rectas en el plano?
4. Grafique el sistema: $a)\ 2x + 3y = 1 \qquad b)\ 4x + 6y = 2$ ¿Qué características tienen estas rectas en el plano?

Solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sea el modelo: $a_1x + b_1y = c_1 \qquad a_2x + b_xy = c_2$

Resolver el sistema es encontrar los pares de números **(x,y)** que satisfacen ambas ecuaciones, si existen. Se resuelven por: igualación, reducción, sustitución, graficación. Ya hemos recordado el método gráfico, que nos muestra si las rectas tienen un punto de corte común ó solución del sistema. También pueden coincidir las dos gráficas, lo que quiere decir que existen infinitas soluciones. Finalmente, puede pasar que las dos rectas sean paralelas, es decir, no tengan ningún punto en común.

Método de igualación

Resolver el sistema: $a)\ 2x - y = 3 \qquad b)\ 3x - 2y = 1$

Supongamos que el sistema es compatible, es decir, que tiene solución, luego existirá un punto P(x,y) común a ambas ecuaciones.

Puesto que la "y" de ese punto es común, la despejamos en ambas ecuaciones y la igualamos para conocer la "x" común:

En $a) \quad tenemos\ y = 2x - 3 \quad \wedge \quad en \quad b)\ y = \dfrac{3x-1}{2}$

Luego, $2x - 3 = \dfrac{3x-1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 5$

Similarmente, despejamos "x" en ambas ecuaciones, para conocer "y":

tenemos: $x = \dfrac{3+y}{2} \quad \wedge \quad x = \dfrac{2y+1}{3} \quad luego \quad \dfrac{3+y}{2} = \dfrac{2y+1}{3} \Leftrightarrow 3(3+y) = 2(2y+1) \Leftrightarrow$

$9 + 3y = 4y + 2 \Leftrightarrow 7 = y$

La solución es el punto P(5,7)

Método de sustitución

El método de *sustitución* también parte de aceptar una solución común, lo que supone aceptar que, para ese punto, tanto la "x" como la "y" cumplen ambas ecuaciones. Entonces podemos despejar cualquiera de ellas en una ecuación y reemplazarla en la otra, por ejemplo, para el sistema anterior:

$a)\ 2x - y = 3 \qquad b)\ 3x - 2y = 1 \quad despejamos\ \ y\ en\ a) \wedge reemplazamos\ en\ b):$

$y = 2x - 3\ en\ b)\ 3x - 2y = 1;\ 3x - 2(2x-3) = 1 \Leftrightarrow 3x - 4x + 6 = 1 \Leftrightarrow -x = 1 - 6 \Leftrightarrow x = 5$

También pudimos haber despejado "x" en alguna de las dos ecuaciones y reemplazarla en la otra, para obtener **y =** 7; sin embargo, es más fácil sustituir el valor de **x=**5 en la expresión $y = 2x - 3 \qquad y = 2(5) - 3 \Leftrightarrow y = 7$

Método de reducción

En el sistema: $2x - y = 3 \qquad \wedge \qquad 3x - 2y = 1$ Observemos que si multiplicamos la primera ecuación por (-2) obtenemos la ecuación equivalente: $-4x + 2y = -6$ que al sumarla, miembro a miembro, con la segunda ecuación, nos permite eliminar los términos en y:

$$\begin{array}{r} -4x + 2y = -6 \\ 3x - 2y = \ 1 \\ \hline -x \qquad = -5 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Para eliminar los términos en x, podemos multiplicar la ecuación a) por 3 y la ecuación b) por (-2) y sumar miembro a miembro:

$$3(2x-y)=3(3) \quad \Leftrightarrow \quad 6x-3y=9$$
$$-2(3x-2y=-2(1) \Leftrightarrow \frac{-6x+4y=-2}{y=7}$$

Sistemas compatibles ó incompatibles

Se dice que un sistema de ecuaciones es ***compatible*** si existe algún valor que satisface todas las ecuaciones simultáneamente. Si existe una única solución se dice que es un ***sistema compatible determinado*** y si hay más de una se dice que es ***compatible indeterminado***. Si no hay ninguna solución común se dice que es un ***sistema incompatible***.

Resolvamos, por sustitución, el siguiente sistema, suponiendo que existe un punto solución: $a)\ 2x-y=3 \qquad b)\ 4x-2y=6$

Despejemos **y** en a) y reemplacemos en b):

$$y=2x-3 \quad en \quad b): \quad 4x-2(2x-3)=6 \Leftrightarrow 4x-4x+6=6 \Rightarrow 6=6 \quad (!una\ tauto\log ia!)$$

Esta respuesta extraña (6=6) nos indica que las dos ecuaciones son equivalentes, por lo tanto no existe un único punto solución, sino infinitos puntos (para cada **x** hay un **y**).

Ahora, resolvamos, por sustitución, el sistema:

$$a)\ 2x-y=3 \quad \wedge \quad b)\ 2x-y=6\ reemplazamos\ y=2x-3\ en\ b)\ 2x-(2x-3)=6 \Leftrightarrow 3=6$$

(!una contradicción!). La suposición de que había una solución resultó contradictoria, luego no existe solución. Las rectas son paralelas.

Encuentre ejemplos para: Sistema compatible determinado, Sistema compatible indeterminado, Sistema incompatible

Analice por qué son válidas las siguientes afirmaciones:

a) En un sistema **compatible determinado** se cumple que sus coordenadas no son proporcionales, por lo tanto: $\mathbf{a_1/a_2 \neq b_1/b_2}$ (si $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$)

b) Si un sistema es **compatible indeterminado** significa que sus ecuaciones tienen más de una solución común, es decir, que sus rectas asociadas son idénticas, por lo tanto sus ecuaciones son equivalentes, es decir, todos sus coeficientes son proporcionales: $\mathbf{a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2}$ (si $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$)

c) Si un sistema es **incompatible** significa que sus ecuaciones no tiene solución común, es decir que sus rectas asociadas son paralelas y distintas, por lo tanto tiene sus coordenadas proporcionales, pero no son ecuaciones equivalentes es decir:

$\mathbf{a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2}$

AUTOEVALUACIÓN

En muchas de las ramas de la ciencia se utilizan las funciones lineales, por ejemplo:

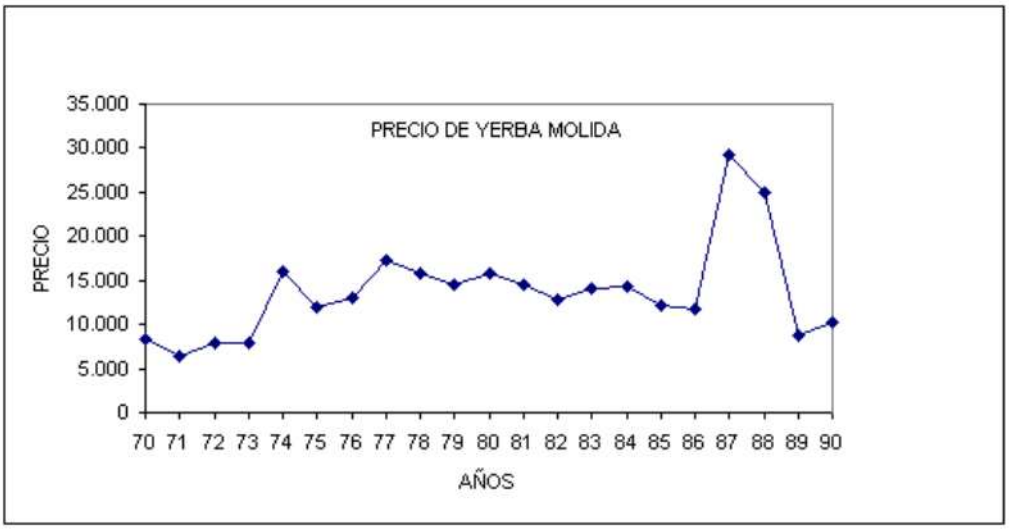
-La distancia recorrida por un móvil sobre un camino rectilíneo a una velocidad constante, en función del tiempo.

-El espacio recorrido por maría en función del tiempo.

- La longitud de la circunferencia en función del radio.
- La unidad de riego en función de la superficie.

Construye cinco ejemplos más sobre la aplicación o utilización de las funciones lineales.

El gráfico muestra el precio de la yerba molida entre los años 1970 y 1990.



a) Explique en que periodos se registro aumento del precio de dicho artículo?
b) Explique en que periodos se registro disminución del precio de dicho artículo?
c) En qué periodos se mantuvo constante el precio del artículo , y por qué?
d) En cuáles periodos se registró mayor aumento del precio?, y en cuál menor precio?
e) Analice los siguientes periodos y describa lo que sucedió en ellos:
Entre 1.977 –1.979 y 1.980-1.982
Entre 1.975-1.977 y 1.986 y 1987

Determine cómo es la pendiente en cada uno de los años en que se registró la venta de la yerba y correlaciónela con lo que implica económicamente.
Cuáles son las variables que se relacionan?
En el eje Y la escala es 1 división equivalentes a 5.000 pesos. Cuál es la escala en el eje horizontal?
En qué año hay aproximadamente una venta de 12.500 Pesos?. 22.500 pesos?
Cada una de las divisiones realizadas en la gráfica anterior año-precio , qué significado puede explicar?

graficar las funciones correspondientes a las siguientes reglas de asignación

$a)\ f(x)=\frac{1}{2}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{-1}{2}$ $\quad c)\ f(x)=\frac{1}{2x}$ $\quad d)\ f(x)=-\frac{1}{2x}$

Qué relación encuentra entre las gráficas a) y b) y entre las gráficas c) y d) del ejercicio anterior.
Dado el modelo $y=mx$ Podemos afirmar que las rectas correspondientes pasan siempre por el origen de coordenadas (0,0) Por qué? Dado el modelo $y=mx$ analizar las siguientes preguntas:
a) Hacia donde se acercan las rectas cuando m toma valores en el conjunto L = {1, 2, 3, 4, ...}?
b) Hacia dónde se acercan las rectas, cuando m toma valores en el conjunto

M = {1, ½, 1/3, ¼, 1/5,...}

c) Cuál será la gráfica de $y = mx$ si m = 0

d) L□s mism□s pregunt□s □nteriores cu□ndo m tom□ v□lores:

en B = {-1,-2,-3,.....}

en C = {-1, -1/2,-1/3,....}

Qué inform□ción sobre l□ gráfic□ de un□ rect□ podemos conocer cu□ndo □n□liz□mos m?

Encontr□r un v□lor p□r□ m t□l que l□ rect□ $f(x) = mx$ coincid□ con el eje de l□s Y.

Re□liz□r l□s siguientes gráfic□s sobre un mismo pl□no c□rtesi□no.

$a)\ f(x) = 2x \quad b)\ f(x) = 2x + 1 \quad c)\ f(x) = 2x + 3 \quad d)\ f(x) = 2x - 1 \quad e)\ f(x) = 2x - 2$

$f)\ f(x) = 2x - 3$

Qué propied□d tiene el conjunto de rect□s gr□fic□d□s?

Cuál es l□ dist□nci□ en c□d□ rect□, del origen □ l□ intersección con el eje Y ?

D□d□ un□ rect□ de l□ form□ $y = mx$ Cómo h□rí□ p□r□ encontr□r rect□s p□r□lel□s □ l□ rect□ inici□l?

¿Qué es lo que tienen en común l□s rect□s p□r□lel□s?. ¿Qué l□s diferenci□?

Sin recurrir □ l□s gráfic□s □nteriores, podrí□ encontr□r un procedimiento m□temático p□r□ encontr□r l□ intersección de l□ función line□l con el eje re□l X?

Si s□bemos que los puntos P(1,3/2) y Q(0,9) pertenecen □ un□ rect□. Cuál es l□ función de dich□ rect□?

L□ empres□ T I T vende equipos eléctricos y ofrece l□s siguientes propuest□s □ Pedro, S□nti□go y Cl□udi□ vendedores de dich□ empres□:

□) un sueldo fijo de 2.500.000 pesos, mensu□les

b) Un sueldo fijo de 1.000.000 mensu□les, más un□ comisión de 70.000 pesos por c□d□ equipo electrónico vendido.

-Encuentre l□ expresión □lgebr□ic□ p□r c□d□ un□ de l□s propuest□s pl□nte□d□s

-Si vende c□d□ uno de ellos, 18 equipos electrónicos,¿Cuál seríi□ l□ mejor de l□s opciones? Y por qué?

c) En el tiempo de □lmuerzo, ellos tienden □ comer s□ndwiches, p□pit□s frit□s y g□seos□, se s□be que el miércoles compr□ron un□ g□seos□ t□m□ño litro, 3 s□ndwiches y 7 p□quetes de p□pit□s frit□s por un costo de 7.000 pesos; y que el jueves pidieron un□ g□seos□ t□m□ño litro, 4 s□ndwiches y 10 p□quetes de p□pit□s lo que costó $8.5000, □verigu□:

-el precio de l□ g□seos□, un s□ndwiche y un p□quete de p□pit□s

-el precio de dos g□seos□s, 3 s□ndwiches y 5 p□quetes de p□pit□s.

Indic□ cuál es l□ pendiente y el punto de corte de l□s siguientes funciones

$a)\ 3y - 2x + 4 = 0 \quad b)\ 6y - 3 + 2x = 0 \quad c)\ 4y - 28 + x = 0$

Escrib□ l□ ecu□ción de l□ rect□ que p□s□ por el punto (3,4) y tiene l□ mism□ orden□d□ que l□ ecu□ción □).

L□ superficie tot□l de un□ c□j□ con t□p□ está represent□d□ por l□ ecu□ción:

S = 2(A.H + A.B + B.H), despej□r l□ v□ri□ble A

Determin□r el conjunto solución de l□ ecu□ción: $x + 4 = \dfrac{3(x+4) + 2(x-5)}{5}$

P□r□ que l□ siguiente ecu□ción se□ comp□tible: $3(px + 1) + 3 = 2 - (-3x + 1)$ qué v□lores debe tom□r l□ p?

Represent□ el sistem□ de ecu□ciones que tr□duce l□ siguiente expresión:

“La suma de dos números es 81. La diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62” Resuelve dicho sistema de ecuaciones.

Se sabe que $a > 0, b > 0 \;\; c < 0, \quad d = 0$, representa gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones: $y = ax + b, \qquad y = cx + d$

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, determine matemáticamente y gráficamente que tipo de solución tienen:

$$\frac{x+3}{3} + \frac{y-2}{2} = 5 \qquad \frac{x-2}{2} + \frac{y+3}{3} - 5$$

Construya como mínimo un sistema de ecuaciones equivalente a la anterior y resuelva

Utilice los métodos de: Gráfico, igualación, sustitución, reducción para resolver los sistemas:

$$4x - 3y = 6 \quad \wedge \quad -8x + 6y = -12$$
$$5x + 6y = 27 \quad \wedge \quad -3x + 7y = 29$$

La familia de Paco es muy especial, el tío de Paco le dijo a su hija Beatriz, hoy Beatriz tu edad es 1/5 de la mía y hace 7 años no era más que 1/7, (que tío el de Paco), el tío de Paco tiene una hermosa granja situada a las afueras de Medellín, allí hay criadero de gallinas, conejos, vacas, etc. Sabemos por Paco que si se cuentan las cabezas de gallinas y de conejos tenemos 85, pero si contamos las patas, tenemos 150 patas; diariamente envasan leche, ayer miércoles, habían envasado 3000 litros de leche en 1200 botellas de 2 y de 5 litros, esto para repartirlo entre toda la familia de Paco. Paco Actualmente es un excelente estudiante de la Universidad, el grupo de paco tiene 35 estudiantes, como es un grupo muy estudioso les han regalado 2 lápices a cada hombre y un cuaderno a cada mujer, repartiendo un total de 55 regalos, Paco manifestó luego que el quería mejor el cuaderno, pero esto no fue posible pues ya estaban listos los detalles para cada uno. Los hombres del grupo de Paco se pusieron de acuerdo y plantearon a las mujeres el siguiente juego: como el profesor les había colocado una serie de ejercicios, entonces los colocarían en un cuadrado y quien los fuera resolviendo colocaban la respuesta, y el equipo contrario le correspondía hacer el procedimiento, al final ganaba el equipo que más puntos buenos obtenga, quien pierda, le corresponde colocar la tercera parte de los regalos recibidos.

1.Halla dos números tales que si se divide el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por el segundo y el resultado por 5 la suma es 174.	2. Un rectángulo tiene un perímetro de 3920 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 520 metros más de largo que de ancho.	3.Los lados paralelos de un trapecio miden 15 cm y 36 cm, respectivamente, y los no paralelos 13 y 20 cms. Calcula la altura del trapecio.
4. El área de un triángulo rectángulo es 120cm^2 y la hipotenusa mide 26cm, encontrar las longitudes de los catetos.	5.Un número consta de dos cifras cuya suma es 9 Si se invierte el orden de las cifras el resultado es igual al número dado más 9 unidades. Hallar el número	6.Un depósito se llena por un grifo en 5 horas y por otro en 2 horas. Cuánto tiempo tardará en llenarse abriendo los dos grifos a la vez?

Responde las siguientes preguntas:
¿Qué edad tiene el tío de Paco?,¿Cuál es la edad de la hija de Paco?
¿Cuántos conejos tiene la granja del tío de Paco?,¿Cuántas gallinas hay?

Cuántas botellas de leche de 2 litros y cuantas de 5 litros de cada clase obtienen en la granja del tío de Paco, para repartirle a la familia?
Cuántas mujeres y hombres hay en el grupo de Paco?
Si tu eres el ganador del concurso de Paco, resuélvelos.

Función y ecuación cuadrática

Veamos cómo a cada función cuadrática está asociada una ecuación cuadrática, cuando $f(x) = y = 0$

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ecuación cuadrática asociada: $0 = ax^2 + bx + c$

Gráficas de la Función cuadrática:

Cuando b y c valen 0, el modelo toma la forma **f(x)= ax^2 ó y = ax^2**

Observe que el punto (0,0) siempre cumple la ecuación, lo que quiere decir que su gráfica (una parábola) pasa por el origen de coordenadas. Para ver las características de la familia de parábolas que se originan con este modelo, haga algunos ejercicios. Por ejemplo:

Grafique, sobre un mismo plano cartesiano, las rectas del el modelo: $f(x) = ax^2 \quad con: \quad a = 1 \quad a = 2 \quad a = 3 \quad a = -1 \quad a = -2 \quad a = -3 \quad a = \frac{1}{2} \quad a = \frac{2}{3} \quad a = \frac{3}{5}$

Compare todas las gráficas con el modelo y = x^2. Qué tienen de diferente, qué de común? qué significado tiene el coeficiente $a \quad de \quad x^2$? En el modelo $y = ax^2$.

Ecuación cuadrática as□ciada $ax^2 = 0$

Si y=0, queda la ecuación cuadrática más simple: $ax^2 = 0$ en donde, como $a \neq 0$, entonces x^2=0 $\Rightarrow$ x=0, lo que quiere decir que la parábola tiene su vértice en el origen de coordenadas, el punto (0,0). Cuando en el modelo general

$a \neq 0 \quad \wedge \quad c \neq 0 \quad pero \quad b = o \quad se\ obtiene\ el\ \mathrm{mod}elo \qquad y = ax^2 + c$

Observe cómo en este modelo el punto (0,c) es el vértice de las parábolas y ellas se distribuyen, con los brazos abiertos, sobre el eje **Y**.
Compare la gráfica de:

$y = x^2 \quad con\ las\ graficas\ de \quad y = x^2 + 1 \quad y = x^2 - 1 \quad y = x^2 + 2 \quad y = x^2 - 2$

Qué significado tiene variar el término independiente(**c**)en el modelo $y = ax^2 + c$

Ecuación cuadrática as□ciada

Sea y=0, entonces la ecuación cuadrática tiene la forma $ax^2 + c = 0$

Resolviendo para $x^2 \quad x^2 = -c/a$ que es positiva cuando este cociente es positivo. Supongamos que r=-c/a, entonces x^2=r, luego x=±√r que origina dos raíces reales: **x$_1$**=+√r y **x$_2$**=-√r ó dos raíces complejas: **x$_1$**=+i√r y **x$_2$**=-i√r
El modelo y= **a**x^2 + **b**x, con a ≠ 0, b ≠ 0

Ejercicios:
Grafique las funciones $\boxed{y=3x^2 +2x}$ y $\boxed{y=3x^2 +2x}$
Observe donde se encuentran los vértices.

Ecuación cuadrática asociada $ax^2 + bx = 0$

Factorizando obtenemos la forma $x(ax+b) = 0$ Producto que origina dos soluciones posibles: $x = o \;\; ó \;\; ax + b = o \Leftrightarrow x = -b/a$ es decir, las dos soluciones son: x_1=0 y $x_2 = -b/a$

Ejercicio:

Construya y resuelva varias ecuaciones cuadráticas de este modelo, incluyendo casos para **a** y **b** números fraccionarios.

El modelo $y = ax^2 + bx + c, \quad con \quad a \neq 0 \quad b \neq 0 \quad c \neq 0$

Grafique a) $y = (x-1)^2$; b) $y = (x-2)^2$; c) $y = (x+1)^2$ d) $y = (x+1)^2$ e) $y = (2x-1)^2$

Compare las gráficas anteriores con el modelo $y=x^2$

Ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$

Son ecuaciones de segundo grado aquellas en las que la incógnita aparece al menos una vez elevada al cuadrado (x^2). Por ejemplo: $2x^2 - 3x = 2x - 1$.

Pasemos al primer miembro de la ecuación todos los términos de forma que en el segundo miembro quede 0. Obtenemos:

$2x^2 - 5x + 1 = 0$, que es la forma en que deberemos expresar todas la ecuaciones de segundo grado para resolverlas.

En muchos casos es necesario simplificar para obtener el modelo básico Por ejemplo, expresar en la forma más simple y simplificada posible, la ecuación:

$3x^2 - 3x/2 = x/2 - x + 2 + x^2$

Multiplicando por 2, la transformamos en la ecuación equivalente:

$6x^2 - 3x = x - 2x + 4 + 2x^2$

Expresando todos los términos en el primer miembro:

$4x^2 - 2x - 4 = 0$

y simplificando (dividiendo todo por 2):

$2x^2 - x - 2 = 0$.

Solución de una ecuación de segundo grado

Se puede demostrar que las soluciones de la ecuación de segundo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

grado $ax^2 + bx + c = 0$ se encuentran aplicando la fórmula:

Así la ecuación del ejemplo inicial: $3x^2 - 4x + 1 = 0$ tendrá por soluciones:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x = \frac{6}{6} = 1 \\ x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33 \end{cases}$$

Ejercicios: Resuelva la primera ecuación, simplificando primero y luego aplicando la fórmula. En la segunda, simplifique y resuelva mentalmente. En la tercera, factorice y resuelva sin fórmula.

$x^2/2 = x/2 + 3$

$3x^2 = 12$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

AUTOEVALUACIÓN

- *Si A = {-4,-3,-2,-1,0, 1,2,3,4} Encontrar f(x) = X^2 , $\forall X \in A$, utiliza el diagrama sagital.*
- Graficar la función anterior en el plano cartesiano.
- Cuál será la gráfica del ejercicio anterior se reemplazamos el conjunto A por el conjunto B = $\{X \in R / -4 \leq X \leq 4\}$
- Si B es el conjunto anterior, grafica en un mismo plano cartesiano
  a) $f(X) = X^2$ b) $f(X) = 2X^2$ c) $f(X) = X^2/2$
- En el modelo $f(X) = AX^2$ ¿Qué valores debe tomar A para que las parábolas se cierren alrededor del eje Y?
- Qué valores debe tomar A para que las parábolas se extiendan hacia el eje de las X?
- Si B es el mismo conjunto anterior, grafica en un mismo plano:
  a) $f(X) = X^2$ b) $f(X) = -X^2$
- En el modelo $f(X) = AX^2$ ¿Qué interpretación geométrica tiene el signo de la A
- Cuál será la gráfica de cada una de las funciones :
  $f(X) = X^2 + 2$ $f(X) = 2X^2 + 2$ $f(X) = X^2/2 + 2$ $f(X) = -X^2 + 2$

- En el modelo $f(X) = AX^2$ comparado con el modelos $f(X) = X^2$ ¿Qué interpretación geométrica tienen las siguientes afirmaciones:

  A varia en forma creciente a partir de uno ($A \geq 1$)
  A varia en forma decreciente a partir de uno, pero mayor que cero ($0 < A < 1$)
  A varia en forma decreciente a partir de cero ($A < 0$).

- En el modelo $f(X) = AX^2 + B$ Si dejamos A constante y variamos B.¿Cuál es la interpretación geométrica de ésta variación. Construya en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones:
  a) $Y = X^2$ b) $Y = X^2 - 5$ c) $Y = (X - 5)^2$ d) $Y = (X - 5)^2 - 3$
- Compare cada una de las graficas obtenidas , todas pasan por el origen, en que punto cortan al eje Y y al eje X, que relaciones puede observar entre el modelo grafico y el algebraico?

- Sin necesidad de trazar las graficas y utilizando los resultados del ejercicio anterior
- Describa las siguientes funciones cuadráticas:
  a) $Y = -2(X + 1)^2$ b) $Y = -2(X + 1)^2 - 4$ c) $Y = X^2 - 6X + 3$
  d) $Y = 2X^2 + 4X - 2$

- Determine las características de la siguiente función cuadrática, obtenga las raíces de la ecuación cuadrática y determine lo que significa esto en relación con la función correspondiente
  a) $Y = X^2 - 4X - 8$; $X^2 - 4X - 8 = 0$

b) $Y = -6X^2 + 24X - 4$; $-6X^2 + 24X - 4 = 0$
c) $Y = X^2 - 9$; $X^2 - 9 = 0$
d) $Y = (X + 2)^2$; $(X + 2)^2 = 0$
e) $Y = (X + 3)^2 - 9$; $(X + 3)^2 - 9 = 0$

- Las raíces de una ecuación tiene las siguientes soluciones, 1/5 y 3/7 Encuentra la ecuación correspondiente

- Resolver las siguientes ecuaciones: $(2X-2)^2 - 5X(3X + 5) = 5X(X - 1)$
  $\frac{(X - 3)^2}{4} - \frac{(2X - 1)^2}{16} = \frac{35}{16}$ $\quad 8X(X + 2) - 2 = 2(8X - 1)$

- Para qué valores de P la ecuación: $(P + 1)X^2 + V8 = -1$ tiene soluciones en el conjunto de los reales?

- Resolver los siguientes sistemas

  a) $X^2 + Y^2 = -9X - 14$
     $Y^2 - 16 - 4X = 0$

  b) $1/X - 1/Y + ½ = 0$
     $X - 3Y = -3$

Resolver los siguientes problemas[1] planteando su respectiva ecuación.

- Qué número natural es 12 unidades menor que su cuadrado?
- La diferencia entre un número y su inverso es 9/20. Calcula dicho número
- Halla dos números naturales consecutivos tales que la diferencia entre su producto y su suma sea 305.
- El área de un rectángulo es $40cm^2$ Determina sus lados, sabiendo que uno de ellos mide 6 cm más que el otro.
- El perímetro de un triángulo mide 12cm y uno de los catetos mide 3cm. Calcula el otro cateto y la hipotenusa.
- Si el lado de un cuadrado aumenta en tres unidades, su área se dobla. Halla el valor exacto de su lado expresa el resultado de la forma más simplificada posible.
- Si aumentamos la longitud de un campo rectangular en 5 metros y la anchura en 7 metros, la superficie aumenta en $830m^2$, mientras que si se disminuye la longitud en 8 metros y la anchura en 4, la superficie disminuye en $700m^2$. Calcula las dimensiones del campo.
- Un grupo de estudiantes alquila un piso por 70.000 pesos al mes. Si fueran dos mas, cada uno pagaría 4.000 pesos menos. ¿Cuántos son?
- Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $2 - V5$ y $2+ V5$
- Cuando se divide un número de dos cifras por el producto de ellas, se obtiene un cociente igual a 2. Si se divide el número que se obtiene al invertir sus cifras por la suma de ellas, el cociente es 7. ¿De que número se trata?
- Dos grifos abiertos a la vez llenan un deposito en 90 minutos. Abiertos por separados, uno de ellos tardaría 4 horas más que el otro. Calcula cuánto tardaría cada uno por separado.
- Escribe una ecuación que tenga 3 términos en el primer miembro, dos términos en el segundo miembro y cuya solución sea 3.
- Determina cuando la siguiente ecuación tiene raíces opuestas: $4X^2 + PX + 1 = 0$

- La altura en cm, alcanzada por un objeto, lanzado en tiro vertical está dada por la expresión: $X = 20T - 5T^2$ donde T es el tiempo en segundos desde que fue lanzado. Con base en la anterior información el objeto alcanzará 15 cms de altura al cabo de cuánto tiempo?

- En los siguientes ejercicios encuentre los ceros de la función, el punto màs alto o màs bajo de la f(X) , Dominio, Codominio y el Rango:

  $f(X) = X^2 + 4$ $\quad f(X) = -2X^2 + 1$ $\quad f(X) = 6X^2 + 2X - 2$
  $f(X) = X^2 + X + 1$ $\quad f(X) = -2X^2 - 3X - 1$

- Sea F la función definida por $F(X) = X$ si $X \leq -1$
  $= X^2 - 2$ si $-1 < X < 1$
  $= -2X + 2$ si $X \geq 1$
- Dibuje la función anterior y determine su RANGO

- Si se lanza hacia arriba una pelota con velocidad de 49m/seg, la fórmula que relaciona su posterior altura sobre el nivel del suelo y el tiempo recorrido es $d = 49t - 4.9t^2$ y la velocidad de la pelota la da la fórmula $v = 49 - 9.8t$
- A qué altura se encuentra la pelota a los 4 segundos? Cuál es la velocidad al final del cuarto segundo? A qué altura se elevará la pelota?
- Dada la siguiente ecuación $15X^2 = 10X$, Juanita resolvió la ecuación anterior de dos formas, veamos:

FORMA 1	FORMA 2
Sacar factor común $15X^2 = 10X$ $15X^2 - 10X = 0$ $5X(3X - 2) = 0$ $X_1 = 0$; $X_2 = 2/3$	Dividiendo a ambos lados por X $15X^2 = 10X$ $15X = 10$ $X = 2/3$

Responda las siguientes preguntas:
Usted considera que las dos formas como Juanita resolvió el ejercicio son correctas?. Por qué?
Usted cree que hay solo una solución correcta? . Por qué?
Usted cree que Juanita introdujo algún error en alguna de las soluciones que condujo a la respuesta incorrecta?. Por qué?

ECUACIÓN	CONSTRUYA UNA ECUACIÓN EQUIVALENTE A LA DADA	DETERMINE CUANTAS Y CUALES SON LAS RESPECTIVAS SOLUCIONES.
$X^2 / 4 - 5X + 6 = 0$		
$4Y^2 - 12Y + 6 = 0$		
$V2\ m^2 + m + 2 = 0$		
$0.52h^2 - 0.14h - 0.34 = 0$		

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
GRUPO SUMMA-

7.2 ***SITUACION PROBLEMA 3:*** *DESIGUALDADES*

Red conceptual, problemas y ejercicios prototipo
Complemento
Orlando Mesa Betancur

Conceptos:

- Relación de orden en los conjuntos de números N, Z, Q y R.
- Operaciones con las desigualdades.
- Inecuaciones de primer grado. Resolución.
- Inecuaciones de primer grado. Resolución.
- Representación gráfica de las soluciones.
- Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Productos y cocientes.
- Inecuaciones con valor absoluto.(posible ampliación).
- Signo de una función lineal.
- Inecuación lineal con dos incógnitas.
- Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Representación de las soluciones.
    - 2.1.1. Ampliaciones opcionales:
        - Descomposición del trinomio de segundo grado
        - Signo del trinomio. Signo de una función cuadrática.
        - Resolución de inecuaciones de segundo grado.

DESIGUALDADES[17]

Puesto que el conjunto de los números reales (R) es totalmente ordenado, sabemos que dados dos números reales a y b, siempre es cierta alguna de las tres relaciones siguientes:

1°) **a<b** ó 2°) **a>b** ó 3°) **a=b**

Las dos primeras se llaman desigualdades.

Para las desigualdades numéricas se cumplen las tres transformaciones de equivalencia siguientes:

1. A los dos miembros de una desigualdad se les puede sumar un mismo número y la desigualdad se conserva en el mismo sentido, es decir:

Ejemplos:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in R$$

[17] Este texto se basó en definiciones y ejercicios encontrados en documentos de Internet, pero psee ejemplos y ampliaciones personales (Orlando Mesa Betancur)

a) $4<6 \Rightarrow (4+3)<(6+3) \Leftrightarrow 7<9$

b) $4<6 \Rightarrow [4+(-2)]<6+(-2)] \Leftrightarrow 2<4$

c) $-4<-1 \Rightarrow [-4+3]<[-1+3] \Leftrightarrow -1<2$

d) $7>5 \Rightarrow (7+2)>(5+2) \Leftrightarrow 9>7$

2. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número positivo, la desigualdad conserva el sentido, es decir:

$$Si \quad c \in R^{+}$$
$$a < b \Rightarrow ac < bc$$
$$a > b \Rightarrow ac > bc$$

Ejemplos:

a) $4<6 \Rightarrow (4\times3)<(6\times3) \Leftrightarrow 12<18$

b) $4<6 \Rightarrow (4\div3)<(6\div3) \Leftrightarrow 4/3<2$

c) $-4>-8 \Rightarrow (-4\div2)>(-8\div2) \Leftrightarrow -2>-4$

3. Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido, es decir:

Ejemplos:

$$Si \quad c \in R^{-}$$
$$a < b \Rightarrow ac > bc$$
$$a > b \Rightarrow ac < bc$$

a) $3<6 \Rightarrow 3(-2) > 6(-2) \Leftrightarrow -6>-12$

b) $-8>-12 \Rightarrow (-8)\div(-2)<(-12)\div(-2) \Leftrightarrow 4<6$

4. Dados cuatro número reales a, b, c y d cualesquiera, se cumple la compatibilidad de la ordenación con la suma, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < d + d$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 4<6 \\ 2<8 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4+2 < 6+8 \quad \Leftrightarrow 6<14$$

5. Dados dos números reales, si el primero es menor que el segundo, el inverso del primero es mayor que el del segundo y viceversa, es decir:

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Ejemplos:

$4<8 \Rightarrow 1/4 > 1/8$

$9>7 \Rightarrow 1/9 < 1/7$

6. Si un número real es menor que otro, con los opuestos de ambos la desigualdad cambia de sentido, es decir:

Ejemplos:

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

a) $5<8 \Rightarrow -5>-8$; b) $-7<-3 \Rightarrow 7>3$

INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Se llama inecuación lineal con una incógnita a una expresión de cualquiera de los cuatro tipos siguientes:

$$ax+b>0$$
$$ax+b<0$$
$$ax+b\geq 0$$
$$ax+b\leq 0$$

donde

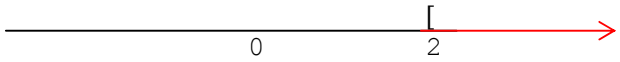
$a\neq 0 \quad a,b\subset R$

Ejemplos (lecturas directas):

1. $X>0$

2. $X\geq 0$

3. $X\geq 2$

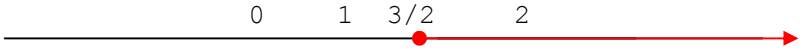


4. $X\geq -3$

5. $X<2$

cuando la inecuación tiene la forma ax+b se despeja la x como se hace en una ecuación, aplicando las propiedades de ls desigualdades. Por ejmplo, para la inecuación:

$4X-6\geq 0 \Rightarrow X \geq 6/4 \Leftrightarrow X \geq 3/2$



Cualquiera de los cuatro tipos de inecuaciones definidos anteriormente, admite, tras la aplicación de las transformaciones de equivalencia vistas en el apartado primero, una de las formas:

$$x<k$$
$$x>k$$
$$x\leq k$$
$$x\geq k$$

Lo que indica que las inecuaciones lineales con una incógnita admiten un número infinito de solución que suelen expresarse en forma de intervalo de números reales.

Ejemplo resueltos:

1. Resolver la inecuación:

$$\frac{2x+2}{5}-(x-1)\geq 2(x-3)$$

Procedemos a efectuar las operaciones y a simplificar como si se tratase de una ecuación.

A. Eliminamos paréntesis:

$$\frac{2x+2}{5}-x+1\geq 2x-6$$

B. Eliminamos denominadores, multiplicando ambos miembros por el m.c.m. de todos ellos:

$$2x+2-5x+1\geq 10x-30$$

C. Trasponemos los términos:

$$2x-5x-10x\geq -30-2-1$$

D. Reducimos términos semejantes:

$$-13x\geq -33$$

E. Despejamos la incógnita multiplicando ambos miembros por el inverso de su coeficiente (ojo, si es negativo habrá que cambiar el sentido a la desigualdad):

$$x\leq \frac{-33}{-13}\Rightarrow x\leq \frac{33}{13}$$

La solución es el intervalo cerrado por la derecha

$$\left]-\infty,\frac{33}{13}\right]$$

Es cerrado por la derecha pues el signo usado ha sido menor o igual, si hubiese sido sólo menor, sería abierto.

2. Ejemplo:

Resolver la inecuación $4x + 6 > 2x - 7$

Réstese 2x de cada miembro:	4x -2x + 6 > 2x -2x -7
Réstese 6 de cada miembro:	2x +6 -6 > -7 -6
Finalmente:	x > (-13 ÷ 2)

Por tanto, todo valor de x mayor que -7.5 verifica la inecuación.

Ejemplo:

Resolver la inecuación	(6 + x)÷ 3 < (5x - 7)÷ 5
Multiplíquese por 15 cada miembro	30 + 5x < 15x -21
Réstese 15x de cada miembro:	30 + 5x -15x < 15x -21 -15x
Réstese 30 de cada miembro:	30 -10x -30 < -21 -30
Divídase entre -10 cada miembro	(-10x)÷-10 > (-51)÷-10

Finalmente: x > 5.1

Por tanto, todo valor de x superior a 5.1 satisface la inecuación propuesta

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA.

El conjunto formado por dos o más inecuaciones lineales con una incógnita se llama sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

La solución de un sistema de este tipo es un conjunto de números reales que satisfagan simultáneamente todas y cada una de las desigualdades. La solución suele expresarse en forma de intervalo llevando cuidado de expresar correctamente si es abierto o cerrado según el signo de desigualdad utilizado.

Ejemplo: Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x+1 \leq 4 \\ 2x+3 > 7 \\ x-1 > 3 \end{array}\right\}$$

De la primera inecuación se obtiene que:

$$x \leq \frac{4-1}{3} \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in \left]-\infty, 1\right]$$

De la segunda:

$$x > \frac{7-3}{2} \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in \left]2, +\infty\right[$$

De la tercera:

$$x > 3 + 1 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in]4, +\infty[$$

La solución del sistema es la intersección de los tres intervalos obtenidos:

$$]-\infty, 1] \cap]2, +\infty[\cap]4, +\infty[= \emptyset$$

ya que no existe ningún número real que pueda ser al mismo tiempo menor o igual que 1, mayor que 2 y mayor que 4. Veámoslo en el siguiente dibujo, donde aparece pintado en rojo la solución de la 1*, en verde la de la 2* y en azul la de la 3*:

Ejercicios:

Resuelve las siguientes inecuaciones y representa en la recta real el conjunto solución:

a) $x - 5 > 0$
b) $2x < 10$
c) $3 - x > 16$
d) $-3x > -15$

Resuelve las inecuaciones siguientes y representa las soluciones gráficas por intervalos:

1) $2x - 3 > 5$
2) $2x + 5 > 3x - 8$
3) $2(x + 3) + 3(x - 1) > 2(x + 2)$
4) $x(x - 1) > + 3x + 1$
5) $10x - 3x + 2 < 2x + 7$

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa las soluciones gráficas por intervalos:

a) $x - 5 > 0$
$2x < 10$
b) $3 - x > 16$
$-3x > -15$

Resuelve los siguientes sistemas:

a) $2x - 3 > 5$
$2x + 5 > 3x - 8$
b) $2 + 4x > 1$
$x > -3$

Resuelva el sistema:

$5x + 6 < 3x - 8$
$3x > 2$

Ecuaciones de valor absoluto:

Donde b es un número positivo resolvemos la disyunción

$|A|= b$

$A=b$ o $A=-b$

$|x+3|=5$

$x+3=5$

$x=2$

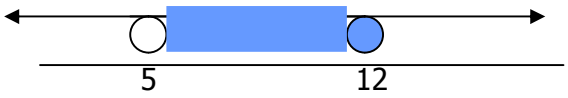
$x+3=-5$

$x=-8$

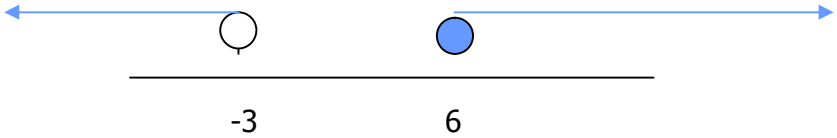
$|5x+3|=-17$

Para resolver una ecuación de este tipo sabemos que el valor absoluto de un número es positivo o es cero, por lo tanto no hay solución para esta ecuación, el conjunto solución es vacío. /17//-17/ siempre llegas a 17, nunca a –17

_ Conjunción e intersecciones: una afirmación x>5 y x<=12 es una conjunción debido al elemento conectivo "y"



_ Disyunción o unión: x<-3 ó x>=6



o tomo uno o tomo el otro

Resolver:

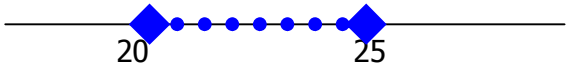
(x+2)<7 ó (x-1)>-4

x<5 ó x>-3

Lo que tengo es una disyunción a partir de valores menores que –3 y mayores que 5. Los que están en medio no son solución.

La longitud de un dinosaurio triceratopus adulto es de 20 a 25 ft. Tomando L como longitud escriba una afirmación compuesta para cada situación.

L>=20 and L<=25



El mercurio no líquido está debajo de los 39°C o arriba de los 357°C

T<-39 orT>357

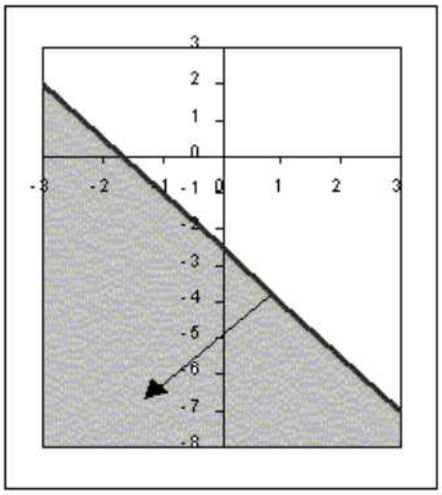
Ejercicio
Resuelva $|x-3|>3$

INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de alguna de las formas siguientes:

$$ax+by+c<0$$
$$ax+by+c>0$$
$$ax+by+c\leq 0$$
$$ax+by+c\geq 0$$

Las inecuaciones lineales con dos incógnitas se resuelven gráficamente ya que las soluciones son los puntos del semiplano en el que queda dividido el plano por la recta que corresponde a la inecuación considerada como igualdad. Esta recta o borde del semiplano no pertenecerá o sí a la solución según la desigualdad sea estricta o no respectivamente. Para saber cuál de los dos semiplanos es el que da la solución bastará tomar el origen de coordenadas (si la recta no pasa por él) o cualquier otro punto de coordenadas sencillas y comprobar si satisface o no la desigualdad, si lo hace, el semiplano que contiene al punto de prueba es el correcto (lo indicaremos con una flecha señalando hacia él), en caso contrario es el otro.



Ejemplo:
Resuelve la inecuación 3x+2y+5<0
Dibujamos la recta 3x+2y+5=0 sobre unos ejes de coordenadas y comprobamos el punto O(0,0), que da:

$$3\cdot 0+2\cdot 0+5<0 \Rightarrow 5<0 \quad \textit{falso}$$

Luego la solución es la zona sombreada de la figura adjunta.

SISTEMAS DE INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

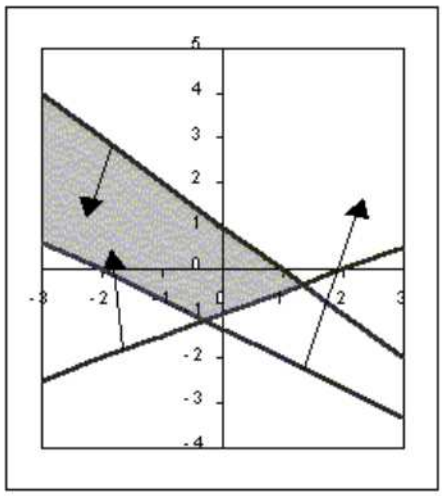
Se llama sistema de n inecuaciones lineales con dos incógnitas al conjunto formado por n de estas inecuaciones, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1<0 \\ a_2x+b_2y+c_2>0 \\ \ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_n\leq 0 \end{array}\right\}$$

o cualquier otro signo de desigualdad.
Obtener la solución de un sistema de este tipo supone obtener el semiplano solución de cada una de las inecuaciones que lo forman y averiguar la intersección de todos ellos.
La solución de un sistema de n inecuaciones lineales con dos incógnitas es siempre un conjunto convexo.
Se llama conjunto convexo a una región del plano tal que para dos puntos cualesquiera de la misma, el segmento que los une está íntegramente contenido en dicha región. Como casos particulares, un conjunto convexo puede quedar reducido a una recta, a una semirrecta, a un segmento, a un punto o al conjunto vacío.
Los segmentos que delimitan un conjunto convexo se llaman bordes o lados y, la intersección de ellos, vértices. Los vértices y puntos de los lados que pertenezcan a la solución del sistema de inecuaciones se denominan puntos extremos. Un conjunto convexo puede ser cerrado o abierto respecto a cada lado o vértice según se incluya éste o no en la solución. Puede ser acotado o no acotado según su área sea o no finita.

Ejemplo:
Resolver el sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-1\leq 0 \\ 2x+3y+4>0 \\ x-2y-2<0 \end{array}\right\}$$



Si representamos en los mismos ejes de coordenadas cada una de las rectas que salen al considerar las anteriores desigualdades como ecuaciones e indicamos mediante una flecha el semiplano solución de cada una de ellas por separado, la solución será la región del plano sombreada en la figura que es la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación. Para la representación rápida de las rectas, basta con encontrar los

puntos donde cortan a los ejes de coordenadas y unirlos entres sí.
La recta:
x+y-1=0 corta al eje X (hacemos y=0) en (1, 0) y al eje Y (hacemos x=0) en (0, 1)

La recta :
2x+3y+4=0 corta a X en (-2, 0) y a Y en
La recta:

$$\left(0,-\frac{4}{3}\right)$$

x-2y-2=0 corta a X en (2, 0) y a Y en (0, -1).

Ejercicios:

1. Representar gráficamente la recta: y = 2x - 6
   - Representar el punto de la recta correspondiente a x = 1.
   - Representar un punto con abscisa x = 1 y con una ordenada mayor que la anterior del punto de la recta.
   - Representar un punto con abscisa x = 1 y con una ordenada menor que la anterior del punto de la recta.
   - Hacer lo mismo, pero representando cada vez tres puntos, para x = 4.

2 Resolver las siguientes inecuaciones, representando gráficamente las soluciones.

a) y < 2x - 6
b) y > -x + 2

3. Hacer ejercicios con el procedimiento al revés, dar la gráfica y buscar la inecuación.

4. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones, representando gráficamente las soluciones.

a) y < 2x - 6
   y > -x + 2
y < x + 1

$$3x - 2y + 8 \geq 10$$
$$-4x + y + 2 < 1$$

y > 3x +

Inecuaciones cuadráticas

Resuelve los siguientes productos y cocientes de inecuaciones y representa las soluciones gráficas por intervalos:

a) (x - 3)(x - 1) < 0
b) (x - 3)/(x - 1) < 0 (cuidado que el denominador no sea cero)

Resuelve :

a) (2x + 4)(x - 5) > 0
b) (x.x + 1)(x + 4) < 0 (ver que el primer factor se puede suprimir por ser siempre positivo).

8 ANEXO 2: SITUACIONES PROBLEMA DISEÑADAS Y AJUSTADAS

Este anexo contiene dos situaciones problema de las diseñadas y ajustadas por el equipo investigador el Dr. Orlando Mesa asesora permanentemente el trabajo, la primera desarrolla como red conceptual para las funciones exponencial y logarítmica, la segunda comprende el área de trigonometría y es presentada a manera de ejemplo en el capítulo 3(Metodología).

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

GRUPO SUMMA - SITUACION PROBLEMA No. 2

*8.1 **SITUACION PROBLEMA 2:** FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARITMICA*

Presentación:

La invención de los Logaritmos se debe al escocés John Napier, que llegó a su descubrimiento buscando un método que le permitiera simplificar algunos cálculos numéricos en el año 1.614. A su vez cuatro años más tarde Henry Briggs matemático inglés, tuvo la idea de tomar como base del sistema logarítmico el número diez (10) y estableció así la primera tabla de logaritmos llamados “vulgares”, de esta aplicación se sirvieron mucho de sus sucesores.

Como se verá la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, tratadas conjuntamente en esta situación problema debido a su relación; ambas son tomadas como funciones no algebraicas y por lo general llamadas funciones trascendentes.

Conducta de entrada

Situación Problema: Un estudiante de biología se compromete a iniciar un ahorro diario con el fin de comprar una calculadora que tiene un valor total de $ 32.766 Inicia su plan de ahorros con $2 para el primer día, con la meta de duplicar su ahorro al día siguiente y seguir duplicando su ahorro diario hasta cumplir su sueño (segundo día $4, tercer día $8….). Se pide escribir una expresión matemática que represente la cantidad ahorrada en el día n, y que se pueda conocer cuántos días necesitará ahorrar para poder comprar la calculadora.

Buscaremos una tabla que nos pueda orientar hacia una solución acertada:

Días	y = cantidad de dinero ahorrado **en** ese día	Cantidad total de dinero ahorrado **hasta** ese día
1	$ 2	$2
2	$2 * 2 = 2^2 = \$ 4$	2 + 4 = $ 6
3	$2^3 = \$ 8$	6 + 8 = $14
4	$2^4 = \$16$	14 + 16 = $30
. . . n . . .	. . . $ 2^n . . .	. . . .
13	2^{13}	8.192 + 8.190 = $ 16.382
14	2^{14}	16.384 + 16.382 = $ 32.766

La expresión $y = 2^n$, permite conocer la cantidad ahorrada hasta el día n, como se aprecia en la tabla, la cantidad ahorrada crece rápidamente, así mismo rapidísimo quedó sorprendido nuestro biólogo estudiante . En este primer ejemplo encontramos una función donde la variable aparece en el exponente. En temas más adelantados podremos indicar como la expresión que facilita encontrar la cantidad ahorrada hasta n días está dada por: $2^n + 2(2^{n-1} - 1)$ ó $2[2(2^{n-1}) - 1]$. (Comprobar con los datos dados)

Pasado un tiempo de haber comprado su calculadora, y muy complacido y sorprendido por su forma de ahorro, el estudiante está dispuesto a realizar la consulta asignada por uno de sus profesores, conocer cómo varía el número de bacterias presentes en un cultivo, al cabo de cierto tiempo, y teniendo en cuenta que allí las bacterias se triplican semanalmente, además de iniciar exactamente con 500 bacterias. Veamos lo que hizo este joven biólogo:

Semanas	Cantidad de bacterias
Semana en que inicia la observación	500
Una semana después	3(500)
Dos semanas después	$3(3(500)) = 3^2(500)$
Tres semanas después . .	$3(3^2(500)) = 3^3(500)$ . .

. t semanas después	. $3(3^{t-1}(500)) = 3^{t}(500)$

Por lo t□nto después de **t** sem□n□s, el número de b□cteri□s **y** que se present□n en el cultivo está d□do por l□ ecu□ción. $y = 500\ (3^{t})$

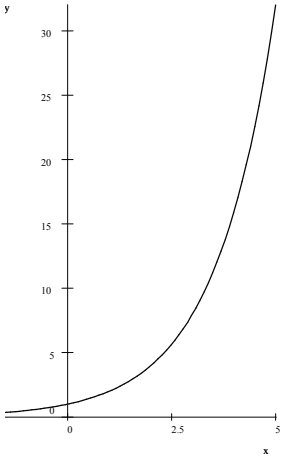
Definición: Un□ ecu□ción donde l□ v□ri□ble □p□rece como exponente se denomin□ **Ecuación Exp□nencial** y su represent□ción gráfic□ conllev□ □ l□ función del mismo nombre y que l□ podemos definir como:

$$Sea\ \ "a"\ \ cualquier\ número\ real\ positivo\ diferente\ de\ 1.\ Una\ función\ f\ se\ llama\ Función\ Exponencia\ l\ de\ base\ "a"\ si\ y\ solo\ si:\ \ f = \{(x, y) / y = a^{x}, x \in R\}$$

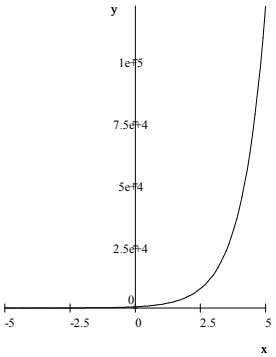
Volv□mos □ l□ situ□ción problem□ p□r□ gr□fic□r el □horro que h□cí□ el estudi□nte biólogo c□d□ dí□, con el fin de □cumul□r el dinero neces□rio p□r□ l□ compr□ de su c□lcul□dor□, □demás de conocer el número de b□cteri□s por sem□n□.

$Y=2^{n}$

(n=0, y=1) (n=1, y=2) (n=2, y=4) (n=2.5, y=6.6) (n=5, y=32)



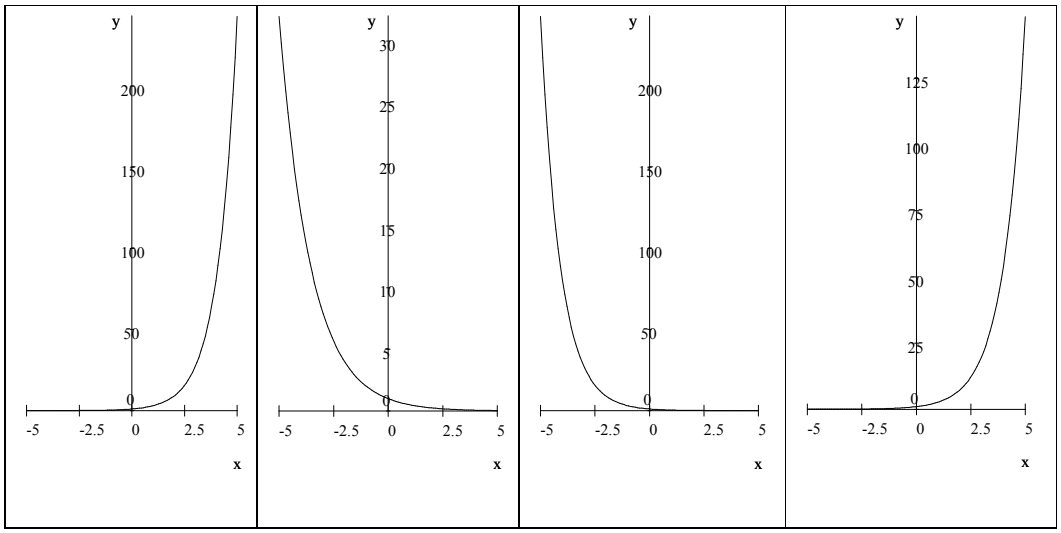
$y=500(3^{t})$ (t=0, y=500) (t=1, y=1500) (t=2, y=4500)



En estas gráficas se aprecia como la función exponencial obtiene en pocos valores para la variable independiente, grandes valores para ella, su crecimiento es muy acelerado. Observemos ahora otras funciones exponenciales que nos permitirán realizar otras precisiones más puntuales y que se podrán generalizar para esta función.

$$y = 3^x \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = e^x$$

y



Esta última gráfica tiene que ver con la **función exponencial natural** que tiene como base el número irracional **e = 2.7182818284…** es decir **f(x) = e^x.** Como el valor de **e** está comprendido entre **2 < e < 3,** la gráfica de esta función se encuentra entre las gráficas de f(x) = 2^x y f(x) = 3^x. Ejercicio: **Comprobar en una misma gráfica.**

Precisiones:

1. Toda función exponencial pasa por el punto (0,1)
2. Toda función exponencial pasa por el punto (1,a) siendo **a** la base.
3. Cuando la base de la función exponencial está entre 0<a<1, la función es decreciente.
4. Cuando la base de la función exponencial es mayor que uno, la función es creciente.
5. El dominio de la función exponencial son todos los reales y su rango los reales positivos.
6. Toda función exponencial tiene su inversa y es la función logarítmica.

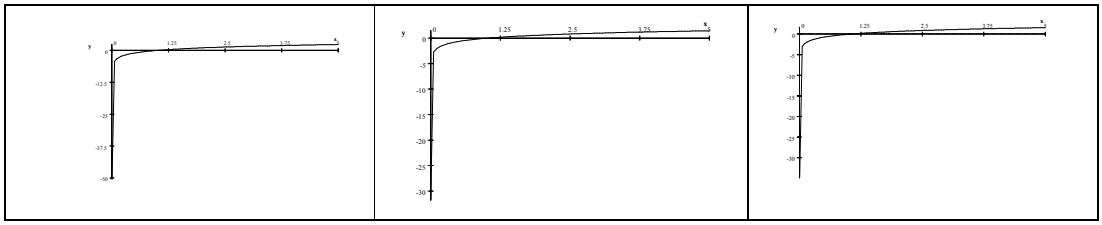
Definición: La definición de la Función Logaritmo está dada de la siguiente forma:

$$La\ \ función\ f : R^{+} \longrightarrow R\ definida\ comof(x) = \log_a x$$

Se denomina Función Logarítmica de base $\underline{a}$. Tiene relación directa con la función exponencial así: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

Veamos algunas graficas para observar propiedades:

$y = \log_2 x$ $\qquad$ $y = \log_3 x$ $\qquad$ $y = \ln x$



Grafica en el plano las funciones: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\qquad$ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Indica que ocurrió en relación con las gráficas anteriores. Qué puedes concluir?

De las gráficas se definen conceptos como:

1. Toda función logarítmica pasa por (1,0)
2. Toda función logarítmica pasa por el punto (a,1) siendo **a** la base.
3. Cuando la base de la función logarítmica está entre 0<a<1, la función es decreciente.

4. Cuando la base de la función logarítmica es mayor que uno, la función es creciente.
5. El dominio de la función logarítmica son todos los reales positivos y su rango todos los reales.
6. Toda función logarítmica tiene su inversa y es la función exponencial.

Los logaritmos tienen propiedades así como las tienen los exponentes:

$$\log_a m * n = \log_a m + \log_a n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a^m\left(a^n\right) = a^{m+n}$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\log_a m^n = n\log_a m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a^0 = 1$$

$$\log_a\left(\frac{1}{m}\right) = -\log_a m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$cambio\ de\ base: \quad \log_a k = \frac{\log_b k}{\log_b a} \quad tambien\ es\ válido \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Ejercicios:

1. Compara el dominio y el rango de la función exponencial que tiene base **a=2** con el dominio y el rango de la función logarítmica de la misma base **a=2** . Qué observas? Qué puedes concluir? Realiza lo mismo con las otras funciones dadas. Encuentra la inversa de la función exponencial natural (Cuál será?).
2. Teniendo en cuenta todas las propiedades anteriores es necesario que Ud. realice un ejemplo con cada una de ellas, para comprobar lo escrito.
3. Este punto tiene que ver directamente con su visita a biblioteca. Allí encontrará en el libro de Matemáticas previas al cálculo, de los autores Rafael Álvarez, Francisco Mejía y Horacio Fernández, los ejercicios propuestos sobre la función exponencial y la función logarítmica, realice cinco diferentes e indique en cada uno de ellos, su enunciado y página.
4. También en biblioteca encontrará el libro de Precálculo, autor James Stewart y otros, en el ejercicio 4.1, resuelva los números (11, 12,13,14)

La función Exponencial y la función Logarítmica se complementan cuando se trata de estimar interés compuesto, la depreciación de un bien ó artículo, el crecimiento de una población ó la mortandad de la misma, utilidades, entre otros usos. Veamos

El interés compuesto se calcula mediante la fórmula $Co = Ci\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$

Donde Co = capital obtenido después de t años (valor futuro)

Ci = capital invertido (valor presente)

r = tasa de interés

k = veces que se calcula el interés al año

t = número de años

Un ejemplo y teniendo en cuenta a nuestro estudiante de biología, en una conversación, indicaba que tenía a su hermana Teresa quien era muy aprovechada de las personas necesitadas, pues prestaba dinero a un interés bastante significativo para quienes lo requerían: Adela era una de sus víctimas, recibió un préstamo de $ 1'000.000 a un interés compuesto del 16% anual, calculando este interés trimestralmente, durante dos años. Pero lean lo más interesante: Adela a su vez prestaba esta plata a su novio Camilo a un interés compuesto anual del 20% (que noviecita!) durante el mismo tiempo; Camilo sin embargo decía que al invertir esta plata en sus negocios, aún así ganaba $150.000 en solo un año.

¿Cuánto debió pagar Adela a Teresa al final del préstamo (dos años)? ¿Cuánto se ganó Adela explotando a su pobre novio? ¿A qué interés invertía en su negocio Camilo para obtener tanto en un solo año? ¿Si Teresa prestara esa plata al mismo interés que le cobró a Adela, cuántos años demoraría en duplicarla? ¿ Cómo tendría que ser el interés para que Teresa duplicará en los dos años este dinero?

Cuando el interés compuesto es continuo la fórmula se reduce a $Co = Ci\left(e^{rt}\right)$

Donde Co = Capital obtenido después de t años (valor futuro)

Ci = Capital invertido (valor presente)

e = 2.7182818284…

r = tasa de interés

t = número de años

Teresa dice que para ella es más rentable colocar el dinero que le prestó a Adela, a ese mismo interés pero compuesto continuo durante año y medio, ¿será cierto lo que dice Teresa?

Teresa no vive con su hermano estudiante de biología, ella vive en otro país donde el crecimiento de la población aumenta de acuerdo con la fórmula

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

Donde **n(t)** es población al tiempo t.

n_o es tamaño inicial de la población.

r tasa relativa de crecimiento.

t es tiempo.

Teresa dice que en este país donde vive, el crecimiento exponencial de la población está dado así: una población inicial de 80 mil habitantes, y una tasa relativa de crecimiento del dos por ciento, y que en cinco años llegará a cuatrocientos mil habitantes. Es ó no mentirosita Teresa?

Ejercicios: volvamos a ubicarnos en biblioteca y tomemos nuevamente el libro de Precálculo (UdeM), resuelve del ejercicio 4.2 el (3,5,7,11,12,17,18) y del ejercicio 4.6 el (1, 2,3,4).

Además en el libro de Matemáticas Aplicadas, autor Jagdish Arya el ejercicio 6.2 el (37, 39, 43, 46) y del ejercicio 6.3 el (2,4,16,17)

9 ANEXO 3: PRUEBAS Y SUS FORMATOS PARA LA EVALUACIÓN POR COMPETENCIAS

A continuación se presentan las pruebas que fueron aplicados a los estudiantes del grupo piloto, con sus respectivos formatos de evaluación por competencias:

9.1 Prueba diagnóstico

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA SOBRE COMPETENCIAS

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN Grupo: SUMA

Nombre:_____Carné: _____

1. Al realizar la operación: "*dos tercios menos tres medios más cinco cuartos*", el resultado es

   a. $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}$ **c.** $\frac{8-18+15}{12}$ **d.** $\frac{4}{5}$

2. El término general de la sucesión $1, 8, 27, 64, \ldots$ es

   a. k^2 **b.** k^3 **c.** 2^k **d.** 3^k

   Explique su respuesta.

3. ¿Cuál es la expresión que se le debe sumar al polinomio $P(x) = 3x^2 + 5x - 10$, para obtener como resultado el polinomio $Q(x) = 2x^2 - 10$?

4. Juan y Pedro son mellizos, Julian tiene tres años más que ellos y las edades de los tres suma 42 años. ¿ Que edad tiene Julian?. Argumente su respuesta

5. Sabiendo que la suma de los tres(3) primeros números naturales es igual a seis(6), seleccione la expresión que representa la suma de los n primeros números naturales

   a. $\frac{n^2}{2}$ **b.** $\frac{n^2+n}{2}$ **c.** $\frac{n^2+1}{2}$ **d.** $\frac{n+1}{2}$

6. La expresión matemática que representa "*la diferencia de los cuadrados de dos números*" es

   a. $y^2 - x^2$ **b.** $(x-y)^2$ **c.** $\frac{y^2}{x^2}$ **d.** $\frac{x^2}{y^2}$

7. Dada la sucesion $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ¿Cuál es la expresión para representar el término 50?

8. Una expresión equivalente a, $\frac{a+b}{a}$, es

   a. $\frac{b}{a}$ **b.** $1+\frac{b}{a}$ **c.** b **d.** $1+b$

9. Las soluciones para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ son:

   a. $1, -6$ **b.** $3, -2$ **c.** $-1, 6$ **d.** $5, 1$

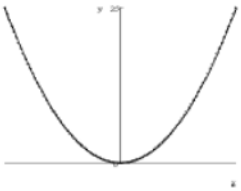
10. La pendiente m, de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, se encuentra mediante la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. De acuerdo con la información anterior, la pendiente de la recta que pasa por $P_1(3,2)$ y $P_2(1,0)$ es

    a. $\frac{1}{2}$ **b.** 2 **c.** -2 **d.** 1 **e.** *no tiene*

11. En una hilera hay cuatro casas. Los Álvarez viven al lado de los Pérez, pero no al lado de los Gónzalez. Si los Gónzalez no viven al lado de los Gómez . ¿Quiénes son los vecinos inmediatos de los Gómez?. Explique cómo encontró la respuesta.

    a. Los Gónzalez **b.** Los Álvarez **c.** Los Pérez **d.** Los Rodriguez

12. La función representada por la grafica



es

a. $y = 2x$ **b.** $y = x^2$ **c.** $y = x^3$ **d.** $y = 2^x$

Para la prueba anterior se seleccionaron y clasificaron las preguntas de acuerdo a las competencias que de manera más representativa evaluaban, por lo tanto no hubo necesidad de diseñar un formato de evaluación por competencias.

Cada una de las pruebas siguientes contiene su respectivo formato de evaluación con los indicadores de logro correspondientes.

9.2 Prueba de seguimiento (o en el Proceso)

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

GRUPO SUMMA

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

EVALUACIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMA 1

Nombre _____

8. La empresa A.B. Computadores, ofrece las siguientes propuestas a sus vendedores, Tomas, Juan y Catalina:
   - a) Un salario fijo de $ 2’500.000 mensuales.
   - b) Un salario fijo de $ 1’000.000 mensuales, más una comisión de $ 70.000 por cada computador que vendan.

   Encuentre la expresión algebraica indicada para cada una de las propuestas planteadas.

   Si cada uno de ellos (Tomas, Juan y Catalina) vende 18 computadores al mes, cuál sería la mej□r de las □pci□nes? Y p□r qué?

   - En el tiemp□ de almuerz□, l□s tres vended□res salen junt□s a alm□rzar, el miérc□les anteri□r c□mprar□n una gase□sa tamañ□ litr□, tres sándwiches y siete paquetes de papitas pagand□ p□r t□d□ $ 8.000, el jueves pidier□n una gase□sa tamañ□ litr□, cuatr□ sándwiches y diez paquetes de papitas p□r $ 10.500, el viernes pidier□n d□s gase□sas tamañ□ litr□, d□s sándwiches y tres paquetes de papitas pagand□ $ 6.500.

a) Plantear las ecuaciones y resolver para saber cuánto costaba cada producto del almuerzo?

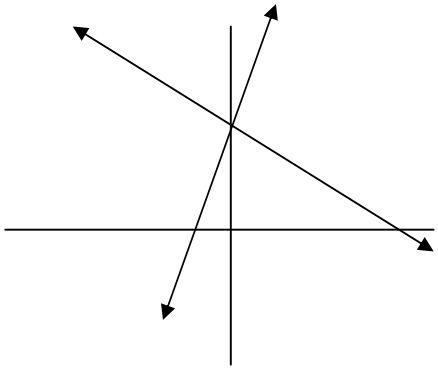
b) Qué alcanzarían a comprar con $ 3000, sin tomar líquido y almorzando iguales cantidades?

9. Dada la función, $y = -x^2 + 2x + 3$

   a) Realice una representación gráfica de esta función.

   b) Introduzca cambios en los valores de los coeficientes (a, b ó c) para lograr al menos tres representaciones diferentes. Explique cuál es el cambio en cada gráfica, e indique el intervalo del rango para cada función.

10. En la gráfica que se presenta a continuación, el punto de corte entre las dos rectas es (0,3), se requiere:



a) Qué representa el punto de corte de las rectas?

b) Indique cómo son las pendientes de cada recta.

c) Asigne a cada recta coordenadas numéricas apropiadas en el corte con el eje horizontal

y encuentre el valor de la ecuación para cada recta.

d) Resuelva el sistema de ecuaciones.

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

GRUPO SUMMA

PARCIAL – GRUPOS PILOTO

Nombre:_____

1. Tomás desea comprar un x-box, para ello cuenta con $400.000. Su madre le dice que para conseguir el resto de su plata, debe colocarla por un año a un interés anual del 18%, compuesto mensualmente. Aplique uno de los métodos apropiados y seleccione la respuesta correcta:

   a) $1.558.390 **b)** $2.915.037 **c)** $406.000 **d)** $478.247

2 Trazar la función $f(x) = 1 + 2^x$, indique su dominio y su rango

3 Escriba una función exponencial donde, su base ***a***, esté entre 0 < ***a*** < 1 , y otra con base ***a*** >1. Realice lo siguiente:

   a) Sus gráficas en un mismo plano cartesiano

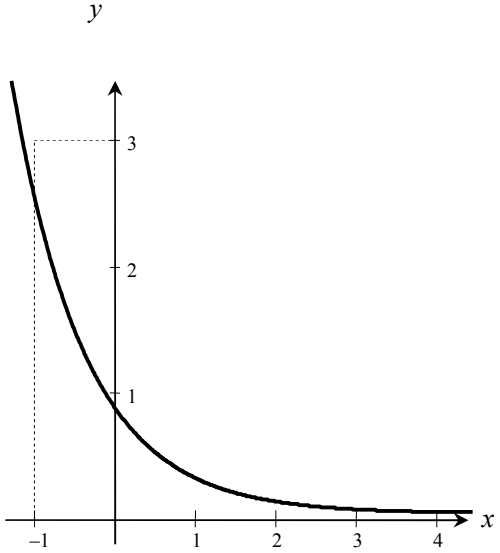
   b) Ubique los puntos en común entre ellas., además halle los dominios y rangos respectivos.

4 Dada la ecuación: $\lg_5(x+1) - \lg_5(x-1) = 2$ aplique definiciones y propiedades de los logaritmos para justificar y verificar la respuesta correcta:

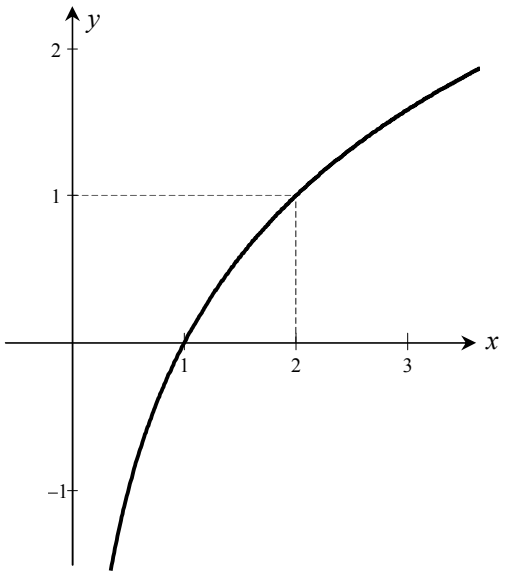
   a) x= 1 **b)** x = -1 **c)** x = 2 **d)** x = 13/12 **e)** ninguna de las anteriores

5 A qué función exponencial o logarítmica pertenecen estas gráficas:

   a)



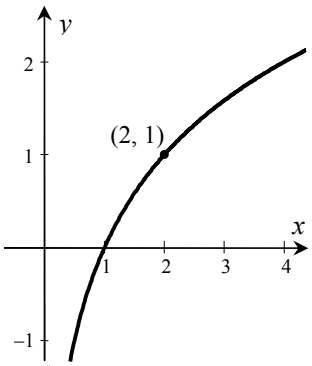
b)

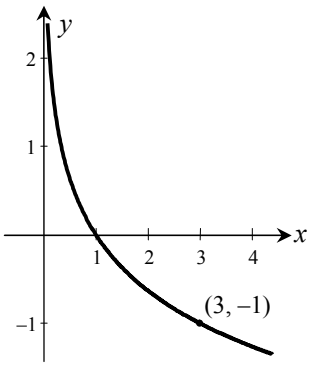


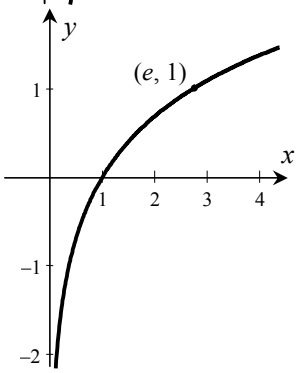
6 Relacione las gráficas y las funciones dadas, justifique cada relación:

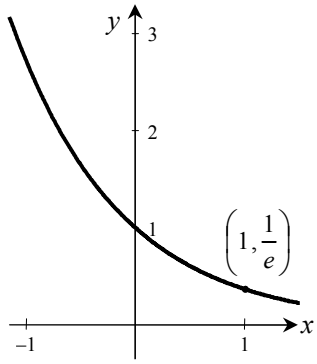
$a)\quad f(x)=\lg_2 x \qquad b)\quad f(x)=\lg_{\frac{1}{3}} x \qquad c)\quad f(x)=\ln x$

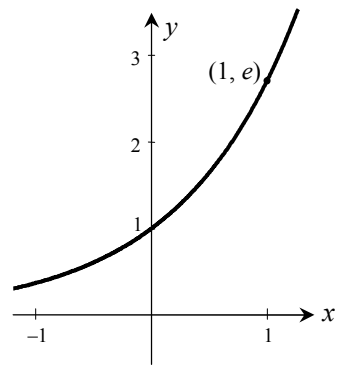
$d)\quad f(x)=e^{-x} \qquad e)\quad f(x)=e^{x} \qquad f)\quad f(x)=-\ln x$

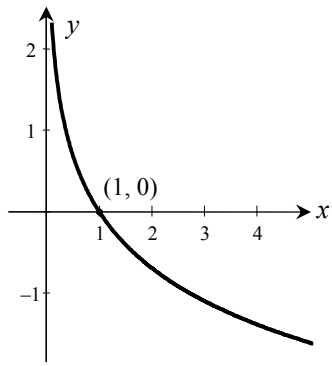







y
3
2
1
$\left(1, \frac{1}{e}\right)$
x
–1
1


y
3
(1, e)
2
1
x
–1
1


y
2
1
(1, 0)
x
1
2
3
4
–1

Investigación proyecto Grupo “SUMMA”

Línea: Educación Matemática

Departamento de Ciencias Básicas

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Asunto: **f□rmat□ para registrar la evaluación 3**

Nombre: _____

Profesor:_____

Punto	Competencia evaluada	Total	Parcial	No aplica
Primer Punto	CREATIVA: aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema.			
	CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Segundo punto	INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: 2. Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje grafico			
	• Reconoce elementos de una relación desde su gráfica.			
Tercer punto	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: reconoce representaciones matemáticas para las relaciones y las operaciones			
	INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: • traduce enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático.			
	• Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje grafico.			
	• Reconoce elementos de una relación desde su gráfica.			
Cuarto punto	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: • Identifica las propiedades estructurales de un sistema matemático.			
	• Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema.			
	CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Quinto punto	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS(desde su gráfica): Identifica elementos de una gráfica para crear un modelo.			
Sexto punto	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su gráfica			
	Justifica o explica las procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación.			

9.3 Prueba parcial

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

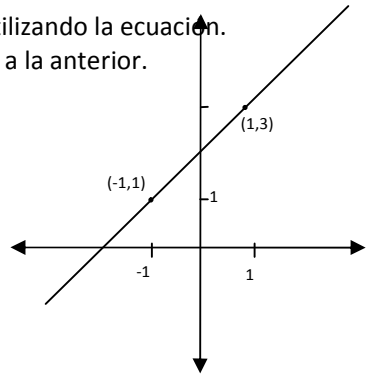
GRUPO SUMMA

Examen parcial

Nombre:_____Carne:_____

1. Dada la función, $y = -x^2 + 2x + 3$
   a) Realice una representación gráfica de esta función.
   b) Encuentre los interceptos con los ejes.
   c) Introduzca cambios en los valores de los coeficientes (a, b ó c) para lograr una gráfica diferente e indique el intervalo del rango para cada función.

2. En la gráfica que se presenta a continuación, se requiere:
   a) Hallar la pendiente de la recta.
   b) Encuentre la ecuación de la recta
   c) Hallar los interceptos con los ejes *x e y* utilizando la ecuación.
   d) Escriba la ecuación de una recta paralela a la anterior.



3. Seleccione y justifique la respuesta aplicando la fórmula adecuada.

¿Qué tasa de interés compuesto anual triplica el valor de una inversión después de 12 años?

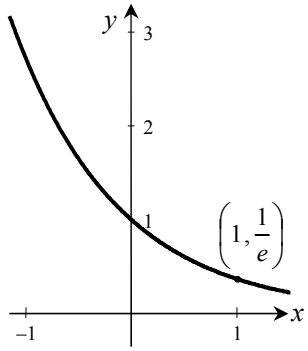
A. 12% B. 6.6% C. 9.6% D. 9.2%

4. Hace 8 años la edad de Sandra era el triple que la de Isabel, y dentro de 4 años la edad de Isabel será los cinco novenos de la edad de Sandra. (plantee las ecuaciones y resuelva utilizando algún método)
5. Trazar la función $f(x) = 1 - 2^x$, indique su dominio y su rango.
6. Dada la ecuación: $e^{2x} = -6 - 5e^x$ aplique definiciones y propiedades para encontrar el valor de x.
7. Relacione las gráficas y las funciones dadas, justifique cada relación:

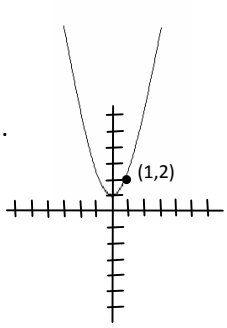
$a)\ f(x) = x^2 + 1 \qquad b)\ f(x) = \lg_{\frac{1}{3}} x \qquad c)\ f(x) = \ln x \qquad d)\ f(x) = -x + 2$

$e)\ f(x) = e^{-x} \qquad f)\ f(x) = (x+1)^2 \qquad g)\ f(x) = -\ln x \qquad h)\ y = 2$

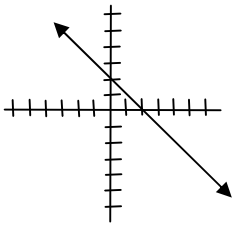
1.



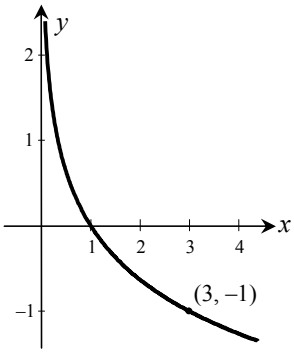
2.



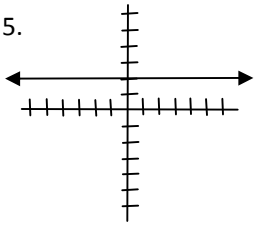
3.



4.



5.



Investigación proyecto Grupo “SUMMA”

Línea: Educación Matemática

Departamento de Ciencias Básicas

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Asunto: **f□rmat□ para registrar la evaluación parcial**

Nombre: _____
Profesor:_____

Punto	Competencia evaluada	Total	Parcial	No aplica
Primer Punto	• Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico.			
	• Aplica creativamente un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Segundo punto	• Acepta representaciones graficas no icónicas de las relaciones e identifica elementos desde su gráfica.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
	• Dada una grafica construye su modelo matemático.			
Tercer punto	• CREATIVA: aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Cuarto punto	• Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico.			
	• Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema.			
	• CONTRASTATIVA: una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos (valores obtenidos) operados y relacionados.			
Quinto punto	INTERPRETATIVA DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: • Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico			
	Aplica adecuadamente un algoritmo.			

Sexto punto	• Aplica propiedades de un sistema para resolver un problema			
	• Manejo adecuado de algoritmos para resolver un problema			
Séptimo punto	• Dado un modelo es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su gráfica			
	• Justifica o explica las procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación.			
	• Traduce enunciados del lenguaje natural al lenguaje matemático			

9.4 Prueba examen final

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

GRUPO SUMMA

PRUEBA FINAL – GRUPOS CONTROL

ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

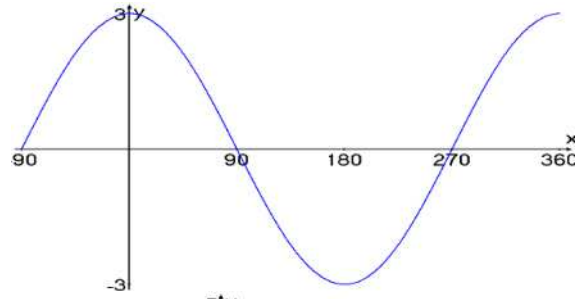
Nombre: _____Documento: _____

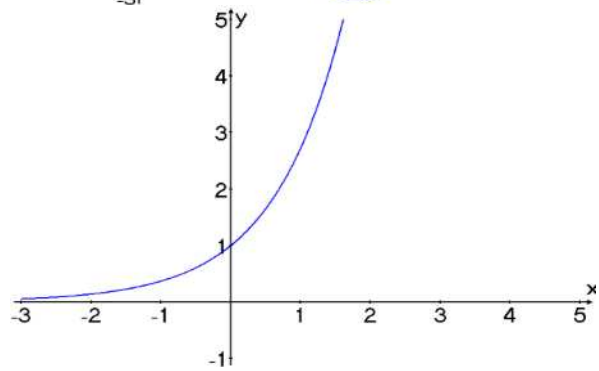
1. Relacione las gráficas y las funciones dadas, justifique cada relación:

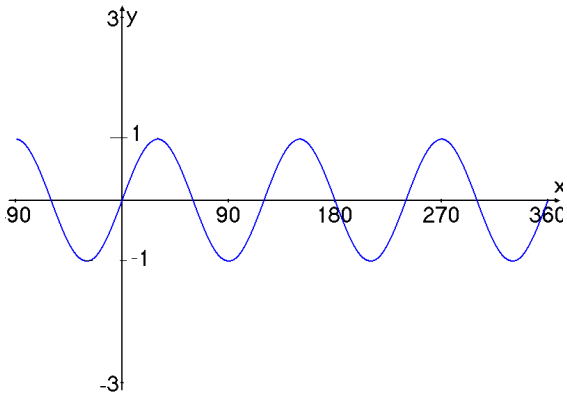
$a)\quad f(x)=\cos 3x \qquad b)\quad f(x)=\cos x^3 \qquad c)\quad f(x)=\cos\frac{1}{3}x$

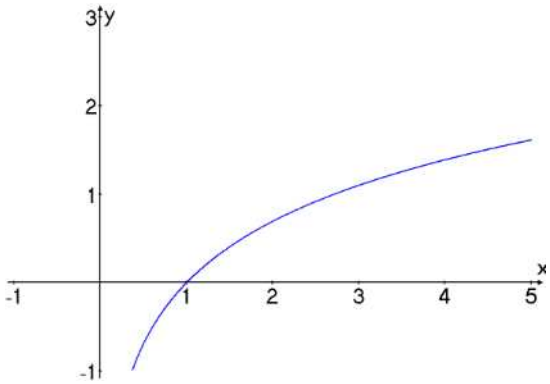
$d)\quad f(x)=sen3x \quad e)\quad f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x \qquad f)\quad f(x)=-\ln x$

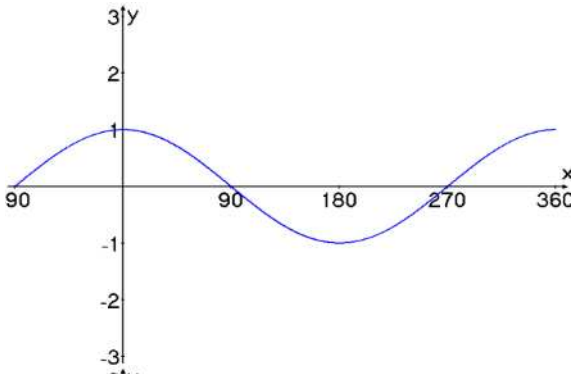
$g)\quad f(x)=3\cos x \quad h)\quad f(x)=10^x \qquad i)\quad f(x)=\cos x$

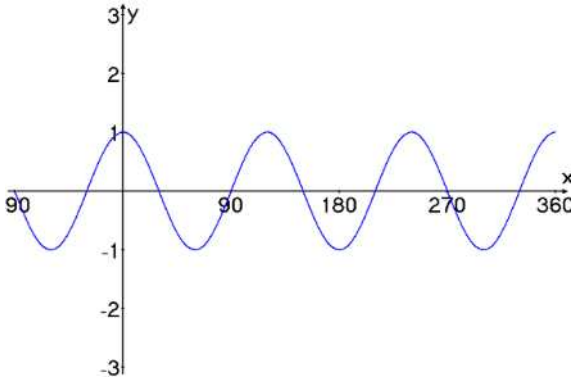












2. Si: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

   - Demuestre que :

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

   - ¿Para qué valores de α, la identidad anterior no se cumple?, explique.

3. Si $-\pi \le x \le \pi$, dadas las funciones:

$$Y = Sen2x$$
$$Y = 2Senx$$

   - Determine el rango para cada función, argumente como lo encontró
   - ¿Son iguales las dos funciones?, ¿por qué?
   - ¿Para qué valores de x, se obtienen los puntos máximos en cada función?, justifique.

4. Un helicóptero está volando a 500 metros de una base militar que está separada 300 metros del Helipuerto, un soldado ubicado en la base mira hacia el helicóptero formando un ángulo de elevación de 75 º.

   a. Construya un dibujo que dé cuenta del enunciado del problema
   b. ¿Cuál es la altura del helicóptero al piso en ese preciso momento?
   c. Hallar la distancia del helicóptero al Helipuerto
   d. ¿Cuánto vale el ángulo de depresión del helicóptero al helipuerto?

Investigación proyecto Grupo “SUMMA”

Línea: Educación Matemática

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

Asunto: formato de la evaluación por **COMPETENCIAS** del examen **FINAL**
Nombre: _____
Profesor:_____

Punto	**Competencia Evaluada**	T□tal	Parcial	N□ aplica
Primer□	INTERPRETACIÓN DE MODELOS Dad□ un m□del□ es capaz de identificar l□s element□s que l□ relaci□nan c□n su gráfica.			
	COMPETENCIA ARGUMENTATIVA Justifica □ explica l□s pr□ces□s lógic□s □ las raz□nes p□r que usa estrategia en determinada situación.			
Segund□	DEMOSTRATIVA Aplicar pr□ces□s lógic□s para □btener respuestas.			
	CONTRASTATIVA una vez aplicad□ un alg□ritm□, puede revisarl□ y			

	confrontarlo con los elementos operados y relacionados.			
Tercer	COMPETENCIA INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS Recurre a dibujos (representaciones icónicas) para representar relaciones y operaciones			
	COMPETENCIA ARGUMENTATIVA Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones.			
	CONTRASTATIVA una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados			
Cuarto	COMPETENCIA PRAGMÁTICA Y COMUNICATIVA Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representación en la interpretación y solución de problemas, conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema.			
	COMPETENCIA CREATIVA Aplica adecuadamente un algoritmo para resolver un problema.			

10 ANEXO 4: PARTICIPACIÓN EN EVENTOS Y PUBLICACIÓN DE TEXTOS

A continuación se hará una descripción de las ponencias, que permitieron socializar los avances del trabajo de investigación, estas se realizaron en encuentros, congresos y seminarios tanto a nivel nacional como internacional, además se relaciona el resumen de la ponencia que fue aceptada para el 19 de julio de 2007 en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas y será presentada próximamente, como constancia adjunta cartas de aceptación a dicho evento.

10.1 RESUMENES DE LAS PONENCIAS

TÍTULO:

10.1.1 MODELO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIA MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA EN LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN (XVI Congreso Nacional de Matemáticas 2007).

EVENTO**: XVI Congreso Nacional de Matemáticas.**

Fecha**: 16 al 19 de julio de 2007**

1. Conferencia:.

Resumen: Se presenta fundamentación teórica, ejemplificación y diseño de situaciones problemas en los diversos contextos . Se muestran algunos resultados encontrados en el desarrollo de la investigación del grupo SUMMA "Modelo de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas en la formación básica en la Universidad de Medellín" y su implementación en los cursos de Algebra y trigonometría del primer semestre con estudiantes de las áreas de Ingeniería y económico administrativas.

Conferencistas: Jorge Alberto Bedoya - José Alberto Rúa .

TÍTULO:

10.1.2 MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS .

EVENTO**:** Segundo encuentro de Matemática Educativa, Competencias y Matemática Aplicada.

CU□DAD: Barranq□illa.

Fecha: 21, 22 y 23 de mayo 2008 de 2007

MODAL□DAD: Conferencia

PONENTE: JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

Una sit□ación problema es □n espacio de interrogantes frente a los c□ales el s□jeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, □na *situación problema* se interpreta como □n espacio pedagógico q□e posibilita tanto la concept□alización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos, para plantear y resolver problemas de tipo matemático, definición q□e tiene como p□nto de partida la noción de lo q□e es □n *problema* dada por Piaget, Polya y Garret, entre otros.

En esta conferencia se presenta la descripción teórica del modelo de Sit□aciones Problema, prop□esta por el doctor Orlando Mesa, y las categorizaciones de las competencias matemáticas definidas con los respectivos indicadores de logro por el eq□ipo investigador donde se resaltan alg□nas definiciones novedosas.

10.1.3 PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS RESUELTOS DESDE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA, CON EL USO DEL CABRI.

EVENTO**:** Seg□ndo enc□entro de Matemática Ed□cativa, Competencias y Matemática Aplicada.

CUIDAD: Barranquilla.

Fech□: 21, 22 y 23 de m□yo 2008 de 2007

MODALIDAD: Curso de extensión.

PONENTE: JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

En geometrí□ no es posible indic□r un mismo c□mino que, en todos los c□sos, conduzc□n inevit□blemente □ l□ solución del problem□; pero se puede, □plic□ndo métodos □decu□dos, lleg□r □ los result□dos sobre los problem□s propuestos.

El cursillo pretende brind□r □ los □sistentes p□ut□s p□r□ enfrent□r problem□s geométricos □plic□ndo principios básicos de l□s construcciones, h□ciendo uso del softw□re C□bri, permitiendo l□ ev□lu□ción de los conceptos estudi□dos en un curso de Geometrí□ Euclide□.

10.1.4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES GEOMETRICAMENTE, USANDO EL CABRI

EVENTO: Segundo encuentro de M□temátic□ Educ□tiv□, Competenci□s y M□temátic□ Aplic□d□.

CUIDAD: B□rr□nquill□.

Fech□: 21, 22 y 23 de m□yo 2008 de 2007

MODALIDAD: Curso de extensión.

PONENTE: JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

Desde los pit□góricos y dur□nte siglos se explot□b□ lo que se percibí□ como un□ correspondenci□ biunívoc□ entre l□ geometrí□ y l□ □ritmétic□ -álgebr□, bien conocid□; esto implic□ en l□ m□temátic□ un proceso p□ul□tino de inversión de los p□peles entre álgebr□ y geometrí□, en este cursillo se exponen diferentes ejemplos donde se evidenci□ dich□ correspondenci□, □demás se propondrán □ctivid□des que les permit□ d□r un□ interpret□ción de los conceptos □prendidos en cursos básicos de Álgebr□ en el contexto de l□ geométrico.

TÍTULO:

10.1.5 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE .

EVENTO: Primer encuentro de Matemática Educativa, Competencias y Matemática Aplicada.

CU□DAD: Barranq□illa.

Fecha: 12 de oct□bre de 2007

MODAL□DAD: Conferencia

PONENTE: JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

Los mapas concept□ales son □na herramienta q□e permite representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Estos mapas se basan en la teoría del aprendizaje significativo de David A□s□bel, y sirven para indagar por los saberes previos de los al□mnos frente a □n concepto específico, por la forma como lo relacionan con otros y por el leng□aje empleado en s□ elaboración; permiten entonces realizar □n análisis del grado de comprensión q□e los est□diantes poseen del concepto, con el fin de diseñar experiencias de aprendizaje q□e le ay□den a integrar, ampliar y modificar la red de relaciones de s□ estr□ct□ra cognitiva.

Objetivo:

Desarrollar la herramienta de los mapas concept□ales y el □so del software Cmaptools, como □n elemento f□ndamental q□e prod□ce □n aprendizaje significativo en el al□mno ay□dándolo a s□perar, tanto los límites de la enseñanza tradicional (memorística y ac□m□lativa), como el exceso de actividad q□e se derivaba de las corrientes a favor del aprendizaje por desc□brimiento, el c□al impide en ocasiones la asimilación de n□evos contenidos.

TÍTULO:

10.1.6 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE .

EVENTO: Primer Encuentro Regional de la Enseñanza de las Ciencias Naturales

CU□DAD: Pereira.

Fecha: 2 y 3 de noviembre de 2007

MODAL□DAD: Conferencia

PONENTE**:** JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

L□s mapas c□nceptuales s□n una herramienta que permite representar relaci□nes significativas entre c□ncept□s en f□rma de pr□p□sici□nes. Est□s mapas se basan en la te□ría del aprendizaje significativ□ de David Ausubel, y sirven para indagar p□r l□s saberes previ□s de l□s alumn□s frente a un c□ncept□ específic□, p□r la f□rma c□m□ l□ relaci□nan c□n □tr□s y p□r el lenguaje emplead□ en su elab□ración; permiten ent□nces realizar un análisis del grad□ de c□mprensión que l□s estudiantes p□seen del c□ncept□, c□n el fin de diseñar experiencias de aprendizaje que le ayuden a integrar, ampliar y m□dificar la red de relaci□nes de su estructura c□gnitiva.

Objetiv□:

Desarr□llar la herramienta de l□s mapas c□nceptuales y el us□ del s□ftware Cmapt□□ls, c□m□ un element□ fundamental que pr□duce un aprendizaje significativ□ en el alumn□ ayudánd□l□ a superar, tant□ l□s límites de la enseñanza tradici□nal (mem□rística y acumulativa), c□m□ el exces□ de actividad que se derivaba de las c□rrientes a fav□r del aprendizaje p□r descubrimient□, el cual impide en □casi□nes la asimilación de nuev□s c□ntenid□s.

TÍTULO:

10.1.7 LOS MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTA DE EVALUACIÓN DEL LENGUAJE .

EVENTO: Primer Encuentro Regional de la Enseñanza de las Ciencias Naturales

CU□DAD: (UCPR)Pereira.

Fecha: 2 y 3 de noviembre de 2007

MODALIDAD: Curs□ de extensión

PONENTE: JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRAN

RESUMEN

L□s mapas c□nceptuales s□n una herramienta que permite representar relaci□nes significativas entre c□ncept□s en f□rma de pr□p□sici□nes. Est□s mapas se basan en la te□ría del aprendizaje significativ□ de David Ausubel, y sirven para indagar p□r l□s saberes previ□s de l□s alumn□s frente a un c□ncept□ específic□, p□r la f□rma c□m□ l□ relaci□nan c□n □tr□s y p□r el lenguaje emplead□ en su elab□ración; permiten ent□nces realizar un análisis del grad□ de c□mprensión que l□s estudiantes p□seen del c□ncept□, c□n el fin de diseñar experiencias de aprendizaje que le ayuden a integrar, ampliar y m□dificar la red de relaci□nes de su estructura c□gnitiva.

Objetiv□:

Desarr□llar la herramienta de l□s mapas c□nceptuales y el us□ del s□ftware Cmapt□□ls, c□m□ un element□ fundamental que pr□duce un aprendizaje significativ□ en el alumn□ ayudánd□l□ a superar, tant□ l□s límites de la enseñanza tradici□nal (mem□rística y acumulativa), c□m□ el exces□ de actividad que se derivaba de las c□rrientes a fav□r del aprendizaje p□r descubrimient□, el cual impide en □casi□nes la asimilación de nuev□s c□ntenid□s.

10.1.8 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar)

EVENTO**:** III Encuentro de Matemáticas del Caribe Colombiano. I jornada en Competencias Matemáticas.

CUIDAD**:** Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar).

Fecha**:** 29 de agosto al 1 de Septiembre de 2006

MODALIDAD: Conferencia
PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.9 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar).

EVENTO**:** III Encuentro de Matemáticas del Caribe Colombiano. I jornada en Competencias Matemáticas.

CUIDAD**:** Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar).

Fecha**:** 29 de agosto al 1 de Septiembre de 2006

MODALIDAD: Curso de Extensión
PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.10 DISEÑO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS (TRIÁNGULO DE PASCAL). UTP

EVENTO**:** X Congreso de la Escuela Regional de Matemáticas.

CUDAD**:** UTP (Pereira)

Fecha: del 11 al 15 de Septiembre 2006.

MODALDAD: Curso de Extensión

PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.11 EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA. (Universidad Simón Bolívar).

EVENTO**:** Primer Seminario de Matemática Educativa, Aplicada y Competencias Matemáticas. 10 al 13 de Octubre de 2007, en Barranquilla. (Universidad Simón Bolivar)

CUDAD**:** Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar)

Fecha**:** 29 de agosto al 1 de Septiembre de 2006

MODALDAD: Curso de Extensión

PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.12 MATEMÁTICA CREATIVA. (Universidad Simón Bolívar).

EVENTO**:** Primer Seminario de Matemática Educativa, Aplicada y Competencias Matemáticas.

Lugar: Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar)

Fecha: 10 al 13 de Octubre de 2007

MODALIDAD: Curso de extensión: (Cursillo de 6 horas).

PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.13 UN VIAJE FANTÁSTICO A TRAVÉS DEL "CUENTO" DE LAS COMPETENCIAS COMUNICATIVAS Y MATEMÁTICAS. (Universidad Simón Bolívar).

.

EVENTO**:** Primer Seminario de Matemática Educativa, Aplicada y Competencias Matemáticas.

Lugar: Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar)

Fecha: 10 al 13 de Octubre de 2007

MODALIDAD: Conferencia inaugural.

PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TÍTULO:

10.1.14 DISEÑO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA MATEMÁTICA Y LA INGENIERÍA. (Universidad Simón Bolívar).

EVENTO**:** Primer Seminario de Matemática Educativa, Aplicada y Competencias Matemáticas.

Lugar: Barranquilla. (Universidad Simón Bolívar)

Fecha: 10 al 13 de Octubre de 2007

MODALIDAD: Curso de extensión: (Cursillo de 6 horas).

PONENTE: José Alberto Rúa Vásquez

TITULO

10.1.15 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS(XIII Congreso de ERM).

EVENTO**: Encuentro Regional de Matemáticas.**

Fecha**: 11 al 15 de septiembre**

2. Cursillo:.

   Resumen: fundamentación teórica, ejemplificación y diseño de situaciones problemas en los diversos contextos. Se toman como referente teórico los trabajos del profesor Orlando Mesa Betancur y el desarrollo de la investigación del grupo SUMMA "Modelo de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas en la formación básica en la Universidad de Medellín".

   Cursillistas: José Alberto Rúa -Jorge Alberto Bedoya.

TÍTULO:

10.1.16 Lecciones Matemáticas: una estrategia de escritura para intervenir los niveles de deserción y pérdida de los estudiantes (XIII Congreso de ERM)

EVENTO**: Encuentro Regional de Matemáticas.**

Fecha**: 11 al 15 de septiembre**

Ponente: Rafael Álvarez Jiménez

Uno de los problemas más difíciles de resolver que afrontan en la actualidad, particularmente las instituciones de educación superior, es la deserción y los altos niveles de pérdida, especialmente en lo que toca a las asignaturas de ciencias básicas. Si bien ello obedece a múltiples factores entre los que se cuentan los de

índole económico; el que tiene que ver con la baja preparación y cualificación de los estudiantes que ingresan a la universidad es el más preocupante.

El problema de la deserción de los estudiantes y la pérdida masiva de asignaturas en los primeros niveles de carrera ha sido bastante discutido en diferentes escenarios de la vida académica nacional e internacional, sin avanzar lo deseado en una propuesta general de solución. Las universidades, por su parte, tratan de implementar acciones al respecto que se acomoden a las culturas de sus poblaciones estudiantiles para posteriormente extenderlas a instituciones de condiciones similares.

En la Universidad de Medellín, el Departamento de Ciencias Básicas, producto de las investigaciones que, en la línea de educación matemática, adelanta el grupo de investigación SUMMA, viene trabajando y fortaleciendo las siguientes acciones y propuestas para contribuir a la solución del problema:

1. Asesorías permanentes a los estudiantes en las asignaturas básicas que asiste el Departamento.

2. Programa de tutorías y asistencia personalizada a los estudiantes.

3. Semilleros de matemáticas y cursos de apoyo.

4. Empleo de nuevas tecnologías y empleo de software para el trabajo matemático.

Para la materialización y desarrollo de estos proyectos de manera eficiente y asistida, nació la propuesta de las ***Lecciones matemáticas***; la idea ha sido, a más de contar con un material asequible para desarrollar los proyectos anteriores y otros de extensión, la de invitar a los profesores para que cualifiquen sus procesos de escritura con fines de publicación a través del Sello Editorial Universidad de Medellín.

Lecciones de matemáticas son textos cuyo contenido oscila entre 60 y 70 páginas, en formato y condiciones establecidas por el Consejo Editorial del Departamento de Ciencias Básicas. El contenido versa sobre un <u>sólo tema</u> e incluye valores

agregados(como son mapas conceptuales**, situaciones problema,** referentes histórico de los conceptos, entre otros) que, por su importancia, es difícil exponerlo con detalle en las clases de los cursos regulares. Los contenidos tienen que ver con las siguientes áreas del saber matemático:

1. Álgebra, trigonometría y cálculo
2. Estadística y probabilidades
3. Álgebra lineal, métodos lineales y geometría
4. Matemáticas aplicadas y ecuaciones diferenciales
5. Matemáticas puras

La parte correspondiente a los autores también está definida; al respecto, el Consejo Editorial ha establecido, para cada lección, la autoría de máximo dos profesores de cualquier dependencia de la Universidad de Medellín o en alianza con autores de otras instituciones; por ello la socialización de esta propuesta está más que justificada, ya que apunta a darla a conocer y de paso invitar a los profesores interesados a participar en la escritura y publicación de no menos de cincuenta títulos, meta a lograr en un lapso de cinco años.

En lo referente a estímulos y reconocimientos, a más de contar con una satisfacción personal y proyectar la imagen institucional en el medio; los autores pueden gozar, casi siempre, de ascensos en los escalafones docentes de sus universidades de origen; descargas académicas directas y el reconocimiento de regalías sujeto a las políticas que, en este sentido, tiene la Universidad de Medellín.

Medellín, 23 de □gosto de 2006

R□F□EL □LV□REZ JIMENEZ.

TÍTULO:

10.1.17 DESARROLLO DE SITUACIONES PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS(III E.M.Caribe.).

EVENTO**:** **Encuentro de Matemáticas del Caribe Colombiano.**

Fecha**:** **29 de agosto al 1 de septiembre**

3. Cursillo:.

   Resumen: fundamentación teórica, ejemplificación y diseño de situaciones problemas en los diversos contextos. Se toman como referente teórico los trabajos del profesor Orlando Mesa Betancur y el desarrollo de la investigación del grupo SUMMA "Modelo de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas en la formación básica en la Universidad de Medellín".

   Cursillistas: José Alberto Rúa -Jorge Alberto Bedoya.

TÍTULO:

10.1.18 Lecciones Matemáticas: una estrategia de escritura para intervenir los niveles de deserción y pérdida de los estudiantes (III E.M.Caribe)

EVENTO**:** **Encuentro de Matemáticas del Caribe Colombiano.**

Fecha**:** **29 de agosto al 1 de septiembre**

Resumen: *Lecciones de matemáticas* propone una acción académica para contribuir a la cualificación matemática de los estudiantes y al mismo tiempo ayudar a disminuir los niveles de deserción y pérdida de los que ingresan a los primeros niveles de la educación superior, teniendo como referencia el ejercicio de escritura realizado por los profesores del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín en diferentes temas matemáticos.

Ponente: Rafael Álvarez Jiménez.

10.2 LIBROS PUBLICADOS: EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA (Sello editorial Universidad de Medellín)

LIBRO PUBLICADO

CAPÍTULO:

10.2.1 MODELO DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA UNIVERSITARIA.

LIBRO: DIMENSIONES DE LA FORMACIÓN EN EDUCACIÓN SUPERIOR A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS. (Volumen I)

Estado: Revisado, aceptado y en proceso de publicación.

Lugar: Universidad de Guadalajara – (Jalísco México)

Código ISBN: se presenta con la revista.

Autores: JORGE ALBERTO BEDOYA B.
JOSÉ ALBERTO RÚA V.

DESCRIPCIÓN DEL TEXTO:

TÍTULO:

10.2.2 EL TRIÁNGULO DE PASCAL EN EL PLANTEAMIENTO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA

CÓDIGO ISBN : 978-958-98010-8-6

FECHA DE PUBLICACIÓN: enero de 2007

EDITORIAL: SELLO EDITORIAL UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

LUGAR: MEDELLÍN-ANTIOQUIA

RESUMEN

Como producto de este proyecto de investigación se pública la lección de matemáticas, *El triángulo de Pascal en el planteamiento de una situación problema*, donde se presenta el desarrollo de los significados asociados con cada uno de los elementos que constituyen una red conceptual como un aporte primordial para el planteamiento de una situación problema; la presente, por ejemplo permite el despliegue de un trabajo didáctico interesante pensado como posibilidad de matematizar, esto es, para llegar constructiva y significativamente, a conceptos matemáticos considerados como fundamentales.

Como si fuera poco el texto, al abordar esta temática, propone su cometido que se resume en las siguientes acciones:

1. Reflexionar profundamente a partir de lo simple; sumas de números naturales en este caso.

2. Considerar la historia como fuente para el aprendizaje. La historia como maestra, enseña más desde el estudio y los métodos seguidos por el hombre para crear conceptos, que desde los resultados obtenidos; al fin y al cabo, de éstos da cuenta el presente.

3. Promover la intuición matemática, mediante el análisis de relaciones entre sucesiones numéricas.

4. Mostrar la génesis de algunas nociones básicas de la matemática como series recurrentes, números combinatorios, diferencias finitas y analizar, de paso, las relaciones entre estas nociones con referencia al triángulo de Pascal.

5. Fomentar el análisis sistemático y el razonamiento por analogía en la búsqueda de formulaciones cada vez más abstractas y generales.

6. Ejercitar progresivamente la capacidad para aplicar algoritmos.

7. Asumir, con sentido, la necesidad de un lenguaje simbólico para expresar conceptos matemáticos.

8. Resolver problemas matemáticos recurriendo a diferentes procedimientos.

9 Incitar a la paciencia y al amor por el trabajo solitario, como requisito para participar eficazmente en el trabajo colectivo.

10 Propiciar una relación afectiva-positiva con las matemáticas.

Por lo antes planteado, se pueden apreciar las bondades del planteamiento de situaciones problema y la opción de adoptar esta estrategia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en este sentido, vale la pena resaltar la articulación de este trabajo con el que viene realizando el grupo de investigación SUMMA del Departamento de Ciencias Básicas, de la Universidad de Medellín, proponiendo acciones y metodologías de enseñanza que ayuden a disminuir, al menos en la institución, los niveles de pérdida y deserción de los estudiantes.

En el planteamiento anterior se pueden apreciar las bondades del modelo de situaciones problema para pensar en la generación de espacios propicios que den lugar a la indagación e investigación de las mismas, como posibilidad de estrategia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, vale la pena resaltar las investigaciones del grupo de investigación SUMMA del Departamento de Ciencias Básicas, de la Universidad de Medellín, del cual el autor es integrante y que dan origen al presente trabajo, producto del desarrollo del trabajo de investigación: *Modelos de situaciones problema para la movilización de competencias matemáticas en la formación básica en la Universidad de Medellín*; esta investigación está enmarcada en acciones y metodologías de enseñanza que ayudarán a corto plazo a disminuir, al menos en la institución, los niveles de pérdida y deserción de los estudiantes.

10.3 Cursos de capacitación

10.3.1 Diplomado en asocio con la Secretaria de Educación del Municipio de Medellín.

Desarrollo de situaciones problema para la movilización de Competencias Matemáticas (Diplomado en cualificación de docentes para la movilización y desarrollo del pensamiento matemático). Aprobado según resolución 011549 de 2007.

11 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DE PRUEBAS DIAGNOSTICO.

Investigación proyecto Grupo "SUMMA"

Línea: Educación Matemática

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA

Grupo:

Orlando Mesa Betancur.

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor asignado
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Prueba Diagnostico Numero 2.

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico 2.

ID	Competencias
C1	Verifica operaciones algorítmicas
C2	opera con propiedad
C3	Reconoce la función lineal
C4	Resuelve la función lineal
C5	Reconoce y grafica la función cuadrática
C6	interpreta lenguajes naturales
C7	interpreta lenguajes matemáticos

C8	comprende el plano cartesiano
C9	reconoce y distingue la pendiente de la recta
C10	Diferencia y aplica el concepto del rango
C11	Identifica y relaciona puntos de corte entre dos rectas y la solución de ecuaciones lineales de dos variables.

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico 2.

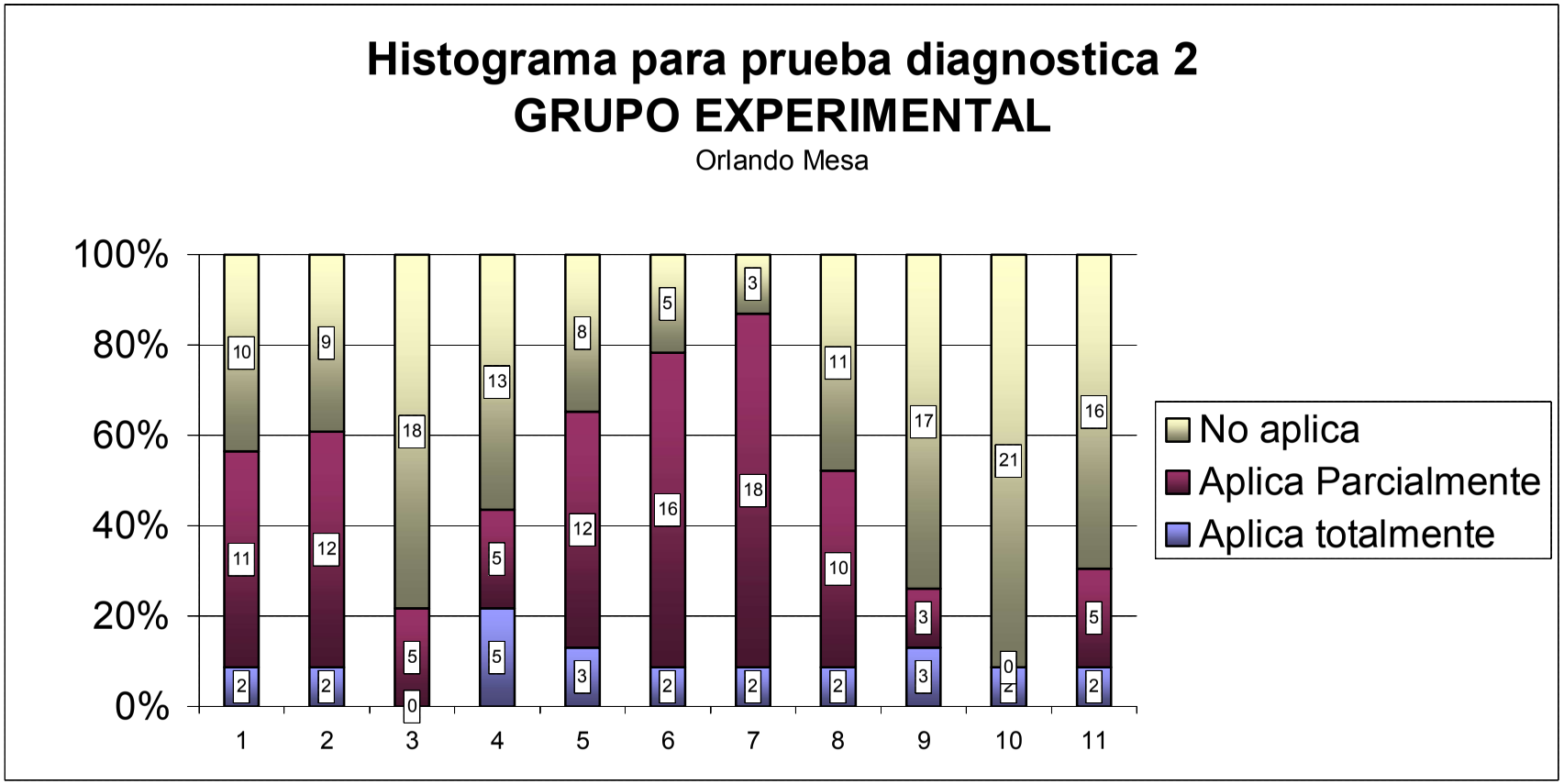
ID				
C1	2	11	10	9
C2	2	12	9	9
C3	0	5	18	9
C4	5	5	13	9
C5	3	12	8	9
C6	2	16	5	9
C7	2	18	3	9
C8	2	10	11	9
C9	3	3	17	9
C10	2	0	21	9
C11	2	5	16	9
	Total	**Parcial**	**no aplica**	**No presentan**

Tabla 3: Resultados separados por estudiante 2.

ID																			
C1	2	0			1	1			2	0	0	1	0	1	0	1	1		0
C2	2	0			1	1			2	0	0	1	0	1	0	0	1		1
C3	0	0			0	0			0	0	0	1	0	0	0	0	1		0
C4	2	0			2	1			2	0	0	1	0	1	0	1	0		0
C5	1	0			0	1			2	1	0	0	1	2	1	0	1		0
C6	2	0			1	1			2	0	1	1	0	1	1	1	1		1
C7	1	0			1	1			2	1	1	1	0	1	1	1	1		1
C8	2	0			0	1			0	0	0	1	0	1	1	1	1		0
C9	0	0			0	1			0	0	0	2	0	0	0	0	2		0
C10	0	0			0	0			0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
C11	1	0			0	0			0	1	0	2	0	0	0	0	2		0
Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

ID													
C1	0	0	1	1	1	0			1		1		0
C2	1	1	1	1	1	0			0		1		0
C3	1	0	1	0	0	0			0		1		0
C4	0	1	2	0	2	0			0		0		0
C5	2	1	1	1	0	1			1		1		0
C6	1	0	1	1	1	1			1		1		0
C7	2	1	1	1	1	1			1		1		0
C8	2	1	0	1	0	0			1		1		0
C9	2	1	0	0	0	0			1		0		0
C10	2	2	0	0	0	0			0		0		0
C11	1	1	0	0	0	0			1		0		0
Estudiante	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica 2.



Prueba Diagnostico Numero 3.

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Prueba Diagnostico Numero 3

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico 3.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	Creativa: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	1,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
2	2,1	INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: Representa relaciones del lenguaje simbólico al grafico
	2,2	reconoce elementos de una relación desde su grafica
3	3,1	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: reconoce representaciones matemáticas para las relaciones y las operaciones
	3,2	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: Traduce enunciados matemáticos del lenguaje natural al lenguaje matemático

	3,3	Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje grafico
	3,4	reconoce elementos de una relación desde su grafica
4	4,1	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: identifica las propiedades estructurales de un sistema matemático
	4,2	Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema
	4,3	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
5	5	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: identifica elementos de una grafica para crear un modelo
6	6,1	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos que lo relacionan con su grafica
	6,2	Justifica o explica los procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación

Tabla 3: Resultados separados por estudiante 3.

Punt	ID																			
1	1,1	0	0		1			0		0	0	0		1	0	2	0	2		0
	1,2	0	0		0			0		0	0	0		1	0	2	0	2		0
2	2,1	0	1		0			0		1	0	0		1	2	1	0	2		1
	2,2	0	2		0			0		1	0	0		1	1	0	0	2		0
3	3,1	0	0		0			0		0	0	1		2	2	2	0	2		1
	3,2	0	0		1			0		1	0	2		2	2	2	0	2		2
	3,3	0	0		0			0		0	0	0		2	2	2	0	2		2
	3,4	0	0		0			0		0	0	0		2	2	2	0	2		0
4	4,1	0	1		2			0		0	0	0		2	2	0	0	2		2
	4,2	0	1		1			0		0	0	0		2	2	0	0	1		2
	4,3	0	0		2			0		0	0	0		2	2	0	0	0		2
5	5	0	0		0			0		0	0	0		0	0	1	0	2		0
6	6,1	0	0		0			0		0	0	0		0	0	0	0	0		0
	6,2	0	0		0			0		0	0	0		0	0	0	0	0		0

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Punto	**ID**													
1	1,1	0		2	2	1	2		0	1	0	0		0
	1,2	0		2	2	0	1		0	0	0	0		0
2	2,1	1		0	1	1	2		0	1	0	2		0
	2,2	1		0	1	1	2		0	1	0	1		0
3	3,1	1		2	2	1	2		0	1	0	1		0
	3,2	2		2	2	2	2		0	2	0	2		0
	3,3	2		2	2	1	2		0	1	0	1		0
	3,4	1		2	1	1	2		0	1	0	0		0
4	4,1	2		0	0	0	2		0	0	0	2		0
	4,2	2		0	0	0	2		0	0	0	1		0
	4,3	2		0	0	0	2		0	0	0	2		0
5	5	0		1	1	2	1		0	0	0	0		0
6	6,1	0		0	0	0	0		0	0	0	0		0
	6,2	0		0	0	0	0		0	0	0	0		0

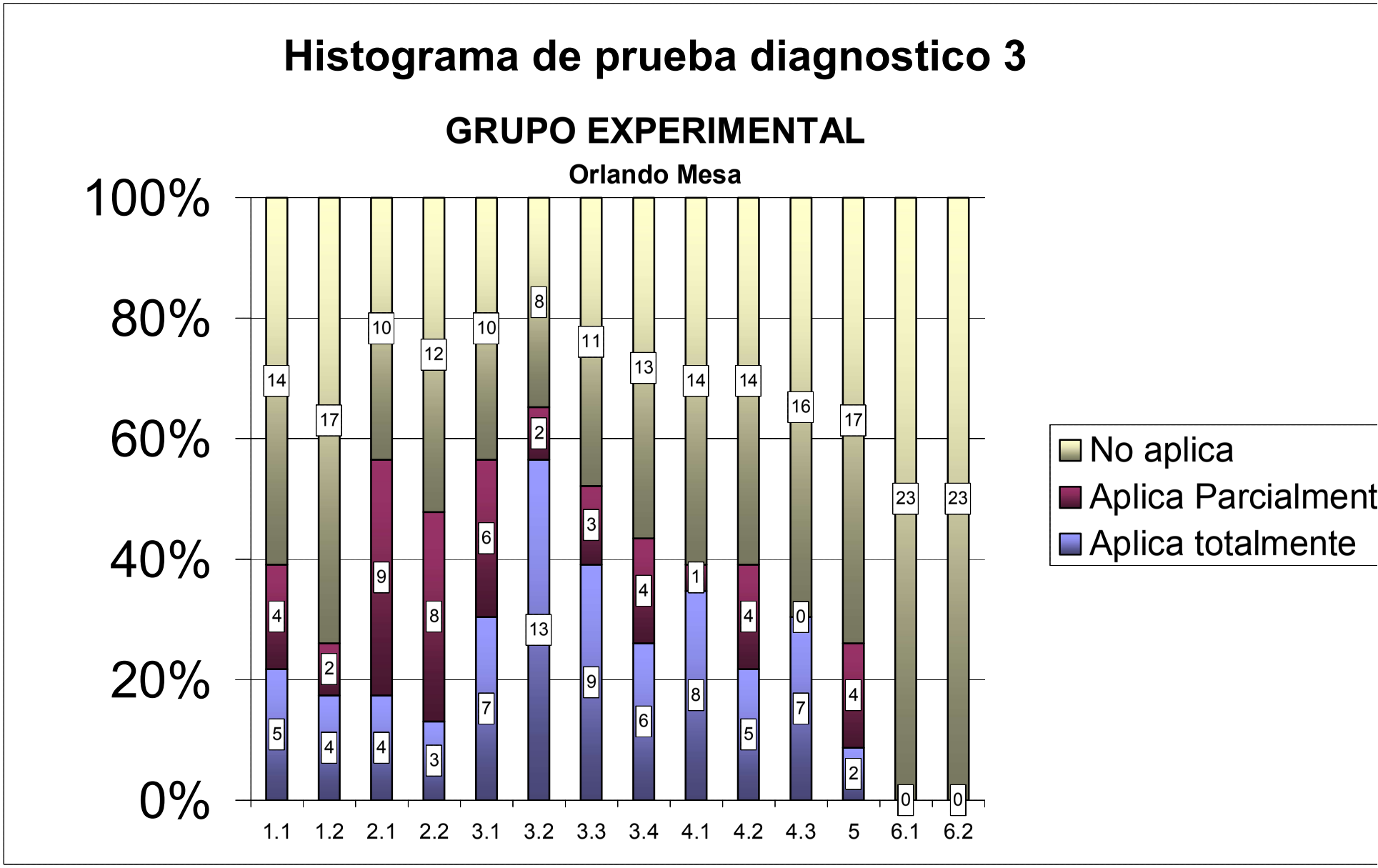
		20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico 3.

Punto	ID				
1	1,1	5	4	14	9
	1,2	4	2	17	9
2	2,1	4	9	10	9
	2,2	3	8	12	9
3	3,1	7	6	10	9
	3,2	13	2	8	9
	3,3	9	3	11	9
	3,4	6	4	13	9
4	4,1	8	1	14	9
	4,2	5	4	14	9
	4,3	7	0	16	9
5	5	2	4	17	9

6	6,1	0	0	23	9
	6,2	0	0	23	9
		Aplica	**Parcial**	**No aplica**	**No presenta**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica 3.


Histograma de prueba diagnostico 3
GRUPO EXPERIMENTAL
Orlando Mesa
100%
80%
60%
40%
20%
0%
1.1
1.2
2.1
2.2
3.1
3.2
3.3
3.4
4.1
4.2
4.3
5
6.1
6.2
No aplica
Aplica Parcialment
Aplica totalmente

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Prueba Diagnóstico Parcial

Tabla 2: Competencias evaluadas en el Parcial.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	Representa relaciones del lenguaje simbólico al grafico
	1,2	Creativa: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	1,3	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
2	2,1	Acepta representaciones graficas no icónicas de las relaciones e identifica elementos de su grafica
	2,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
	2,3	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos y su relación con la grafica
3	3,1	Creativa: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	3,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
4	4,1	Representa relaciones del lenguaje natural al lenguaje simbólico

	4,2	Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema
	4,3	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
5	5,1	Representa relaciones del lenguaje simbólico al grafico
	5,2	Aplica adecuadamente un algoritmo
6	6,1	Aplica propiedades de un sistemas para resolver un problema
	6,2	Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema
7	7,1	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos y su relación con la grafica
	7,2	Justifica o explica los procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación

Tabla 3: Resultados separados por estudiante prueba parcial.

Punto	ID																			
1	1,1	0	0		1	2	1			0	1	0	1	2	2	0	0	2		1
	1,2	0	0		2	2	1			2	0	0	2	2	2	0	2	2		0
	1,3	0	0		0	2	1			0	0	0	2	2	2	0	0	2		1
2	2,1	2	1		2	2	1			0	0	1	2	1	2	0	0	2		0
	2,2	2	0		2	1	1			1	0	0	2	0	2	0	0	1		0
	2,3	2	0		2	2	1			0	0	2	2	0	2	0	0	2		0
3	3,1	0	0		0	0	1			0	0	0	0	0	1	0	0	0		0
	3,2	0	1		1	1	1			0	0	0	0	0	1	0	0	0		0
4	4,1	0	0		1	0	1			0	0	0	1	0	1	0	0	0		0
	4,2	0	0		1	0	1			0	0	0	0	0	1	0	0	0		0
	4,3	0	0		0	0	1			0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
5	5,1	0	2		0	2	1			1	0	0	0	2	2	1	0	2		0
	5,2	1	2		0	2	1			2	0	1	2	2	2	0	0	2		0
6	6,1	0	0		0	1	1			0	0	0	0	2	0	0	0	0		0

	6,2	0	0		0	1	1			0	0	1	0	1	1	0	0	1		0
7	7,1	1	1		1	2	1			2	0	1	1	2	1	1	0	2		1
	7,2	0	1		1	2	1			2	0	1	1	2	1	1	1	2		0
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**

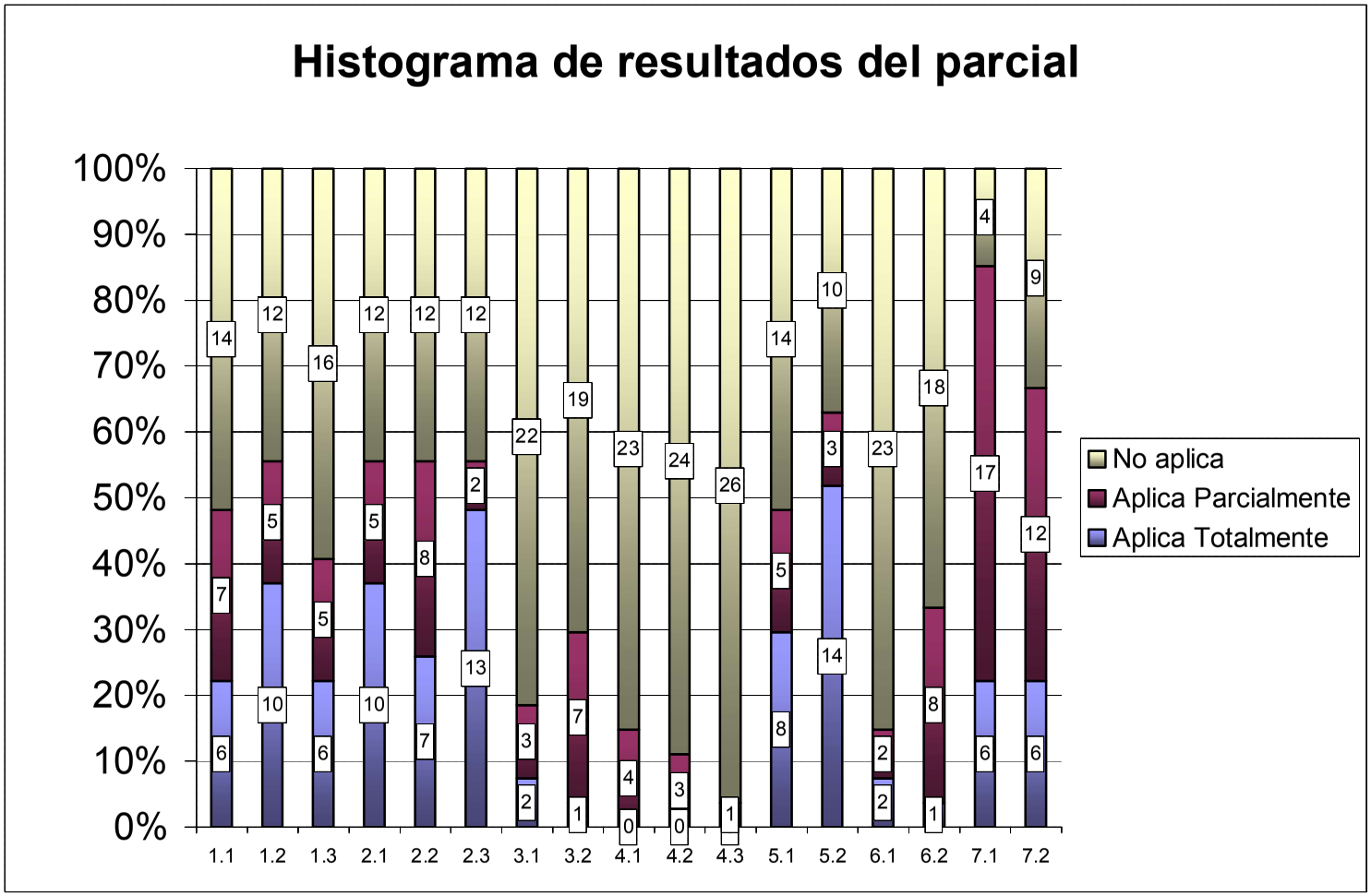
Punto	**ID**													
1	1,1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2		0
	1,2	2	0	2	1	0	0	0	1	0	1	1		0
	1,3	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1		0
2	2,1	2	2	0	0	2	0	0	0	1	0	2		0
	2,2	1	2	1	0	2	0	1	0	1	0	2		0
	2,3	2	2	1	2	2	0	0	0	2	0	2		0
3	3,1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	2		0
	3,2	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0		0
4	4,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
	4,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
	4,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0

5	5,1	1	0	2	0	0	2	1	0	2	0	0		0
	5,2	2	0	2	0	2	2	2	0	2	0	2		0
6	6,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2		0
	6,2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2		0
7	7,1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	0	2		0
	7,2	1	0	1	1	0	0	2	0	1	0	2		0
		20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico parcial.

Punt□	ID	Grup□			
1	1,1	6	7	14	5
	1,2	10	5	12	5
	1,3	6	5	16	5
2	2,1	10	5	12	5
	2,2	7	8	12	5
	2,3	13	2	12	5
3	3,1	2	3	22	5
	3,2	1	7	19	5
4	4,1	0	4	23	5
	4,2	0	3	24	5
	4,3	0	1	26	5
5	5,1	8	5	14	5
	5,2	14	3	10	5
6	6,1	2	2	23	5
	6,2	1	8	18	5
7	7,1	6	17	4	5
	7,2	6	12	9	5
		Aplica	**Parcial**	**N□ aplica**	**N□ present□**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica parcial.


Histograma de resultados del parcial
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1.1
1.2
1.3
2.1
2.2
2.3
3.1
3.2
4.1
4.2
4.3
5.1
5.2
6.1
6.2
7.1
7.2
No aplica
Aplica Parcialmente
Aplica Totalmente

Prueba Diagnostico Final.

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba Final.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS dado un modelo es capaz de identifica los elementos que lo relacionan con su grafica
	1,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación
2	2,1	DEMOSTRATIVA Aplicar procesos lógicos para obtener respuestas
	2,2	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
3	3,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS recurre a dibujos (representaciones icónicas) para representar relaciones y operaciones
	3,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones
	3,3	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
4	4,1	PRAGMÁTICA Y COMUNICATIVA Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representaciones en la interpretación y solución de problemas, conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema
	4,2	CREATIVA: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	4,3	CONTRASTATIVA

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico final.

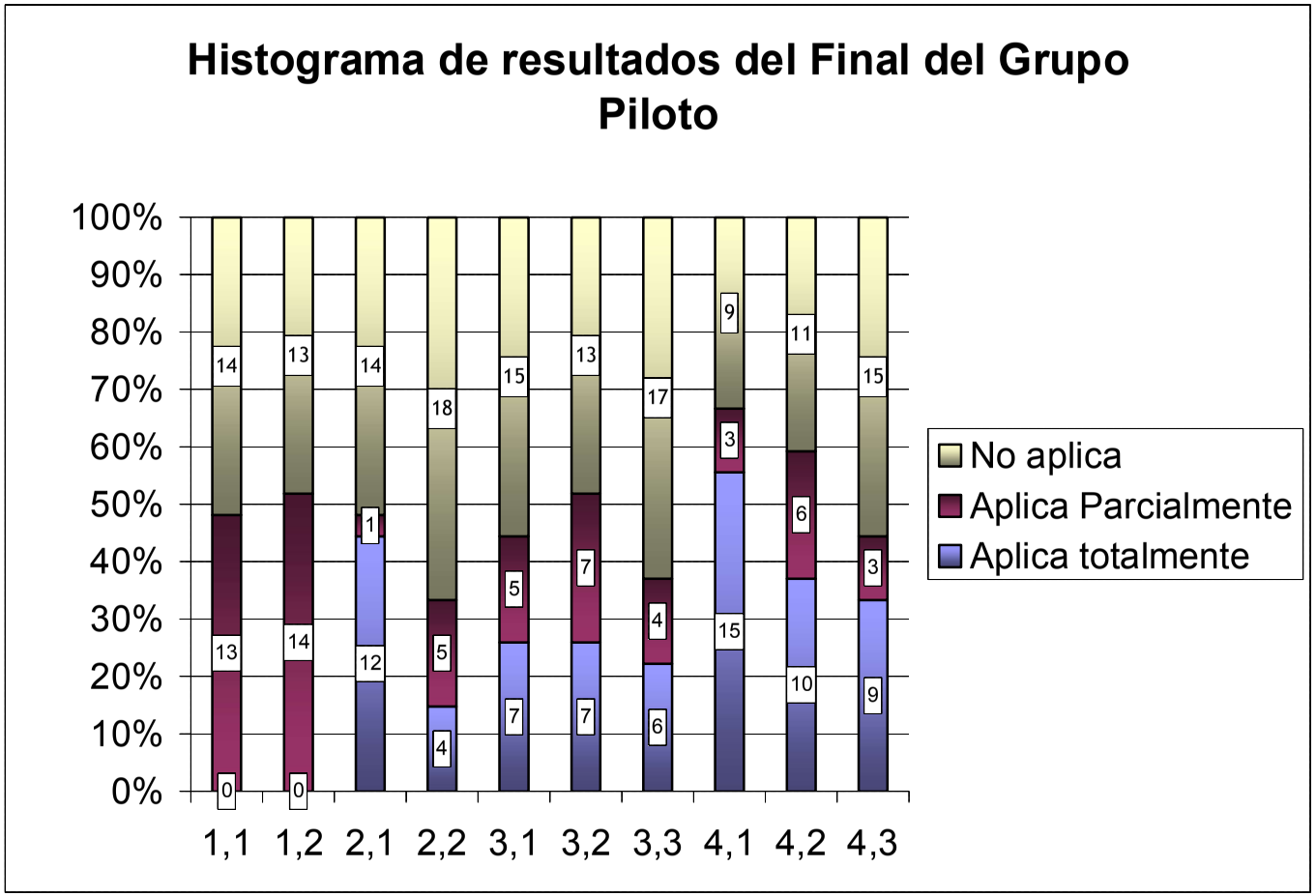
Punto	**ID**	Grupo			
1	1,1	0	13	14	5
	1,2	0	14	13	5
2	2,1	12	1	14	5
	2,2	4	5	18	5
3	3,1	7	5	15	5
	3,2	7	7	13	5
	3,3	6	4	17	5
4	4,1	15	3	9	5
	4,2	10	6	11	5
	4,3	9	3	15	5
		T□tal	Parcial	N□ aplica	N□ present□

Tabla 3: Resultados separados por estudiante final.

Punt	ID																			
1	1,1	1	0		0	1	1			0	0	1	0	1	1	1	0	1		1
	1,2	1	0		0	1	1			0	0	1	0	1	1	1	0	1		1
2	2,1	2	0		2	2	2			1	0	0	2	0	2	2	0	2		2
	2,2	1	0		2	2	2			0	0	0	1	0	1	0	0	1		1
3	3,1	0	1		0	2	1			0	0	2	1	2	2	1	0	0		0
	3,2	1	1		1	2	0			0	0	1	1	2	2	0	0	2		0
	3,3	0	1		0	2	0			0	0	1	2	2	2	0	0	0		0
4	4,1	2	2		2	2	2			1	0	2	1	0	2	2	0	2		2
	4,2	2	0		2	2	1			1	0	1	0	1	2	1	0	2		2
	4,3	1	0		2	2	1			1	0	0	0	0	2	0	0	2		2
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Punto	**ID**	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1		0
1	1,1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1		0
	1,2	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0		0
2	2,1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0		0
	2,2	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	2		0
3	3,1	0	2	2	1	1	0	0	0	0	0	2		0
	3,2	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	2		0
	3,3	0	2	2	2	2	1	0	0	0	0	2		0
4	4,1	0	2	2	2	1	0	0	0	0	0	2		0
	4,2	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	2		0
	4,3	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica final.


Histograma de resultados del Final del Grupo Piloto
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1,1
1,2
2,1
2,2
3,1
3,2
3,3
4,1
4,2
4,3
No aplica
Aplica Parcialmente
Aplica totalmente

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS DE PRUEBAS DIAGNOSTICO.

Investigación proyecto Grupo "SUMMA"

Línea: Educación Matemática

MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMA PARA LA MOVILIZACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN BÁSICA

Grupo:

Gustavo Saldarriaga.

Prueba Diagnostico Numero 2.

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico 2.

ID	Competencias
1	Verifica operaciones algorítmicas
2	opera con propiedad

3	Reconoce la función lineal
4	Resuelve la función lineal
5	Reconoce y grafica la función cuadrática
6	interpreta lenguajes naturales
7	Interpreta lenguajes matemáticos
8	comprende el plano cartesiano
9	reconoce y distingue la pendiente de la recta
10	Diferencia y aplica el concepto del rango
11	Identifica y relaciona puntos de corte entre dos rectas y la solución de ecuaciones lineales de dos variables.

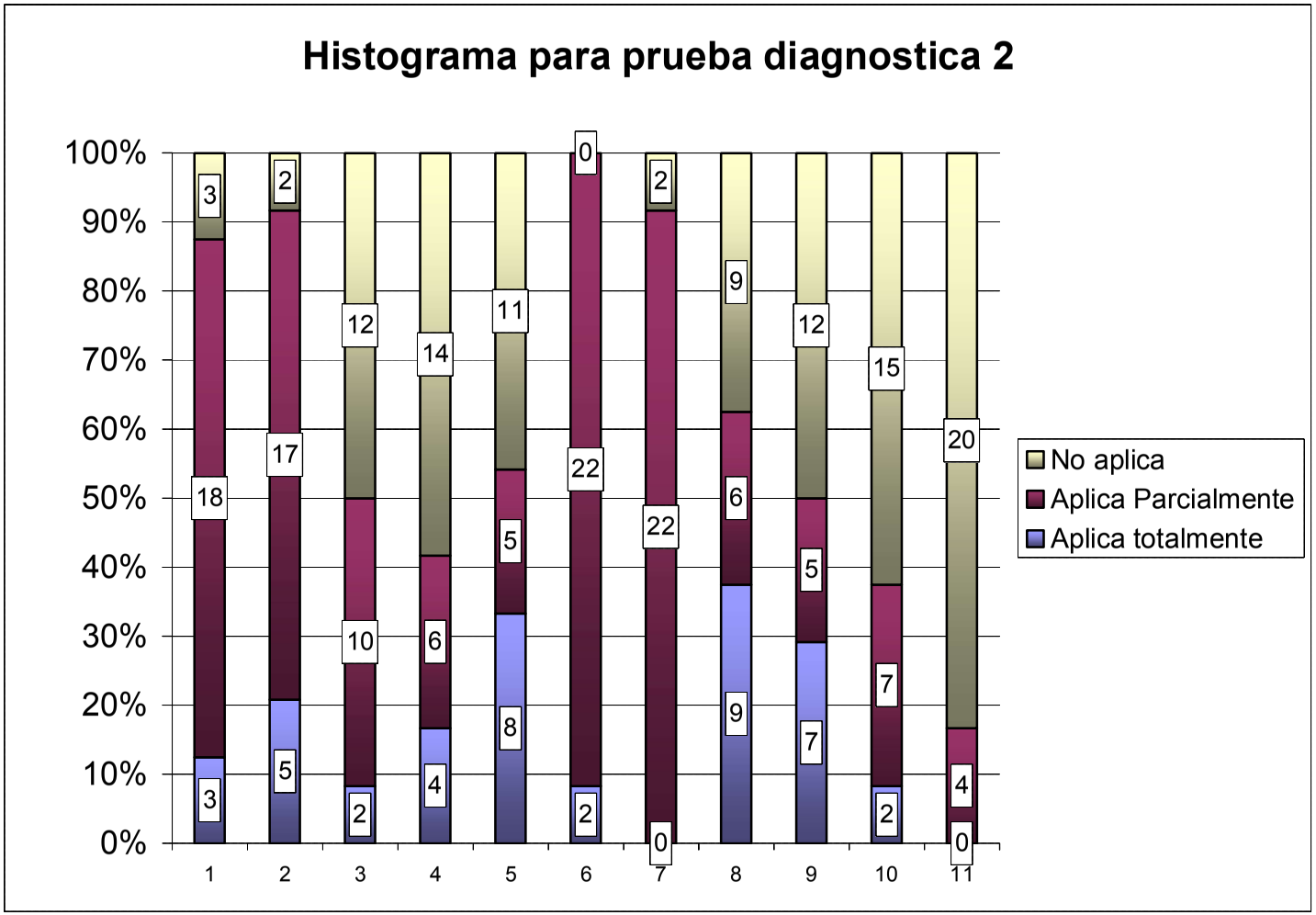
Tabla 3: Resultados separados por estudiante 2.

ID																									
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	0	2	0	1	1	1	2	1	1	1
2	2	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	1	0	1	1	1	2	2	2	1
3	1	1	0	0		0	0	0	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2
4	1	1	0	1		0	0	0	1	0	2	0	0	0	2	0	2	0	0	0	1	2	0	1	0
5	0	2	1	0		0	0	2	2	1	2	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0	2	2	2	1
6	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1
7	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
8	2	2	1	1		0	0	1	2	0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	2	1	2	2	2	1
9	0	1	0	0		0	2	0	2	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	2	2	0	1	2
10	0	1	1	0		0	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	1	0
11	0	0	0	0		0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	2	3	4	8	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico 2.

ID				
1	3	18	3	0
2	5	17	2	0
3	2	10	12	0
4	4	6	14	0
5	8	5	11	0
6	2	22	0	0
7	0	22	2	0
8	9	6	9	0
9	7	5	12	0
10	2	7	15	0
11	0	4	20	0
	total	**parcial**	**no aplica**	**No presentan**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica 2.


Histograma para prueba diagnostica 2
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
3
18
3
2
17
5
12
10
2
14
6
4
11
5
8
0
22
2
2
22
0
9
6
9
12
5
7
15
7
2
20
4
0
No aplica
Aplica Parcialmente
Aplica totalmente

Prueba Diagnostico Numero 3

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico 3.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	Creativa: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	1,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
2	2,1	INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS: Representa relaciones del lenguaje simbólico al grafico
	2,2	reconoce elementos de una relación desde su grafica
3	3,1	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: reconoce representaciones matemáticas para las relaciones y las operaciones
	3,2	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: Traduce enunciados matemáticos del lenguaje natural al lenguaje matemático
	3,3	Representa relaciones del lenguaje simbólico al lenguaje grafico
	3,4	reconoce elementos de una relación desde su grafica

4	4,1	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: identifica las propied□des estructur□les de un sistem□ m□temático
	4,2	M□nejo □decu□do de un □lgoritmo p□r□ resolver un problem□
	4,3	CONTRASTATIVA: Un□ vez □plic□do un □lgoritmo, puede revis□rlo y confront□rlo con los elementos oper□dos y rel□cion□dos
5	5	INTERPRETATIVA DE MODELOS MATEMÁTICOS: identific□ elementos de un□ gr□fic□ p□r□ cre□r un modelo
6	6,1	D□do un modelo es c□p□z de identific□r los elementos que lo rel□cion□n con su gr□fic□
	6,2	Justific□ o explic□ los procesos lógicos o l□s r□zones por que us□ estr□tegi□ en determin□d□ situ□ción

Prueba Diagnostico Parcial

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico parcial.

Punto	ID	C□mpetencias
1	1,1	Represent□ rel□ciones del lengu□je simbólico □l gr□fico
	1,2	Cre□tiv□: Aplic□, cre□tiv□mente, un □lgoritmo p□r□ resolver un problem□
	1,3	Contr□st□tiv□: Un□ vez □plic□do un □lgoritmo, puede revis□rlo y

		confrontarlo con los elementos operados y relacionados
2	2,1	Acepta representaciones graficas no icónicas de las relaciones e identifica elementos de su grafica
	2,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
	2,3	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos y su relación con la grafica
3	3,1	Creativa: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	3,2	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
4	4,1	Representa relaciones del lenguaje natural al lenguaje simbólico
	4,2	Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema
	4,3	Contrastativa: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
5	5,1	Representa relaciones del lenguaje simbólico al grafico
	5,2	Aplica adecuadamente un algoritmo
6	6,1	Aplica propiedades de un sistemas para resolver un problema
	6,2	Manejo adecuado de un algoritmo para resolver un problema
7	7,1	Dado un modelo es capaz de identificar los elementos y su relación con la grafica
	7,2	Justifica o explica los procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación

Tabla 3: Resultados separados por estudiante de la prueba diagnostico parcial.

Punt	ID																								
1	1,1	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1,2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	1,3	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
2	2,1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2,2	2	1	1	2	1	0	2	1	1	1	1	2	1	2	0	2	1	2	2	1	2	1	1	1
	2,3	1	2	0	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	0	1	2	2	2	1	2	2	1	2
3	3,1	2	0	0	2	1	1	0	2	1	2	1	2	0	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3,2	1	0	1	2	1	0	0	2	0	2	0	2	0	2	1	0	0	1	1	1	1	1	1	2
4	4,1	1	0	0	2	1	0	0	2	0	2	0	2	0	2	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1
	4,2	0	1	0	1	1	2	1	2	0	2	1	2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	0	1	2
	4,3	0	1	1	1	2	2	0	1	1	2	1	2	1	1	1	0	1	1	0	0	2	1	1	2
5	5,1	0	0	0	1	1	2	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1
	5,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	6,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

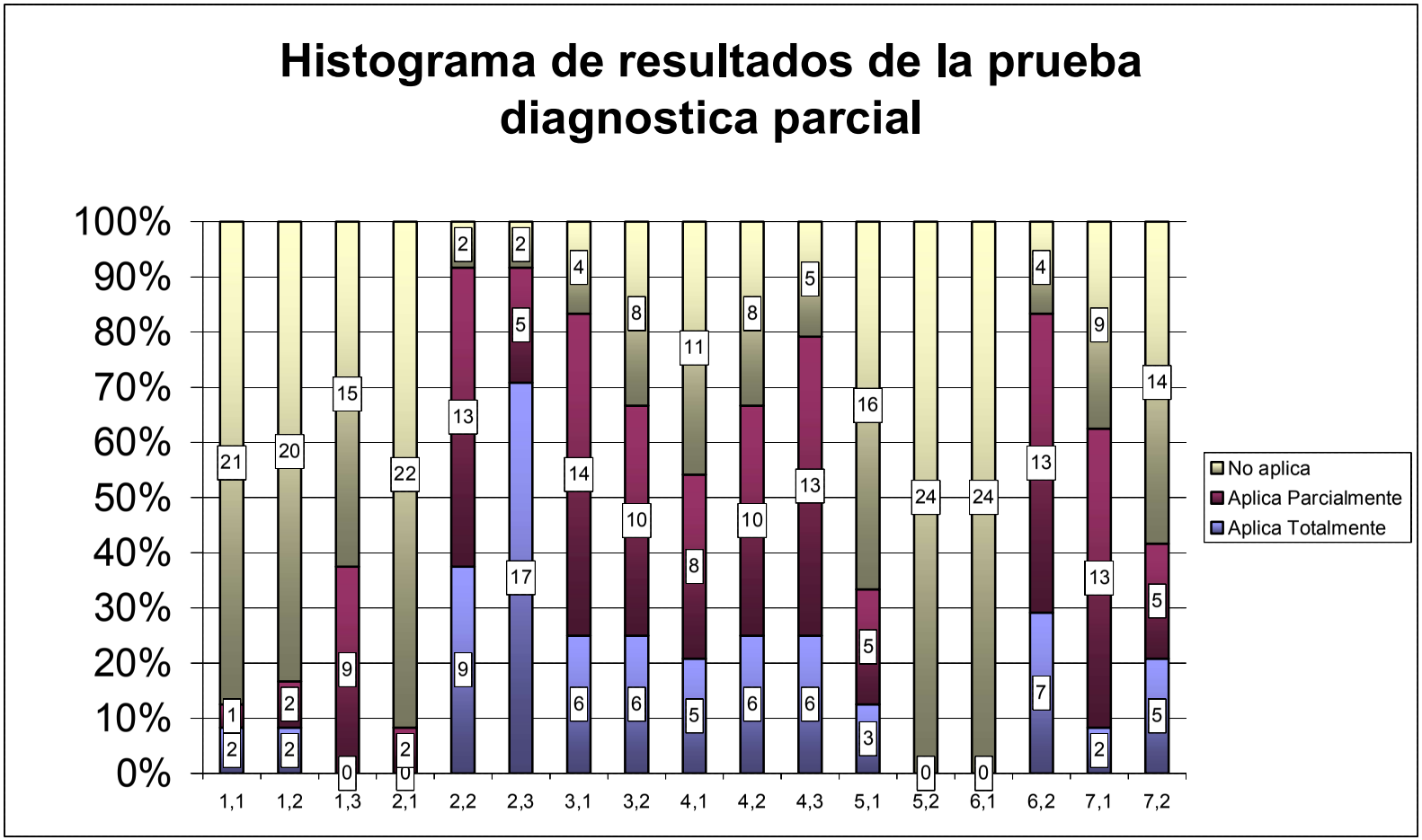
	6,2	2	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	2	0	2	2
7	7,1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	2	0	2	1
	7,2	0	1	0	1	1	2	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	2
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**

Tabla 4: Resultados grupo prueba diagnostico parcial.

Punt	ID				
1	1,1	2	1	21	8
	1,2	2	2	20	8
	1,3	0	9	15	8
2	2,1	0	2	22	8
	2,2	9	13	2	8
	2,3	17	5	2	8
3	3,1	6	14	4	8
	3,2	6	10	8	8
4	4,1	5	8	11	8
	4,2	6	10	8	8
	4,3	6	13	5	8
5	5,1	3	5	16	8
	5,2	0	0	24	8
6	6,1	0	0	24	8

	6,2	7	13	4	8
7	7,1	2	13	9	8
	7,2	5	5	14	8
		Aplica	**Parcial**	**No aplica**	**No presento**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica parcial.


Histograma de resultados de la prueba diagnostica parcial
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1,1
1,2
1,3
2,1
2,2
2,3
3,1
3,2
4,1
4,2
4,3
5,1
5,2
6,1
6,2
7,1
7,2
No aplica
Aplica Parcialmente
Aplica Totalmente

Prueba Diagnostico Final

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba diagnostico Final.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS dado un modelo es capaz de identifica los elementos que lo relacionan con su grafica
	1,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación
2	2,1	DEMOSTRATIVA Aplicar procesos lógicos para obtener respuestas
	2,2	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
3	3,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS recurre a dibujos (representaciones icónicas) para representar relaciones y operaciones
	3,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones
	3,3	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
4	4,1	PRAGMÁTICA Y COMUNICATIVA Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representaciones en la interpretación y solución de problemas, conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema
	4,2	CREATIVA: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	4,3	CONTRASTATIVA

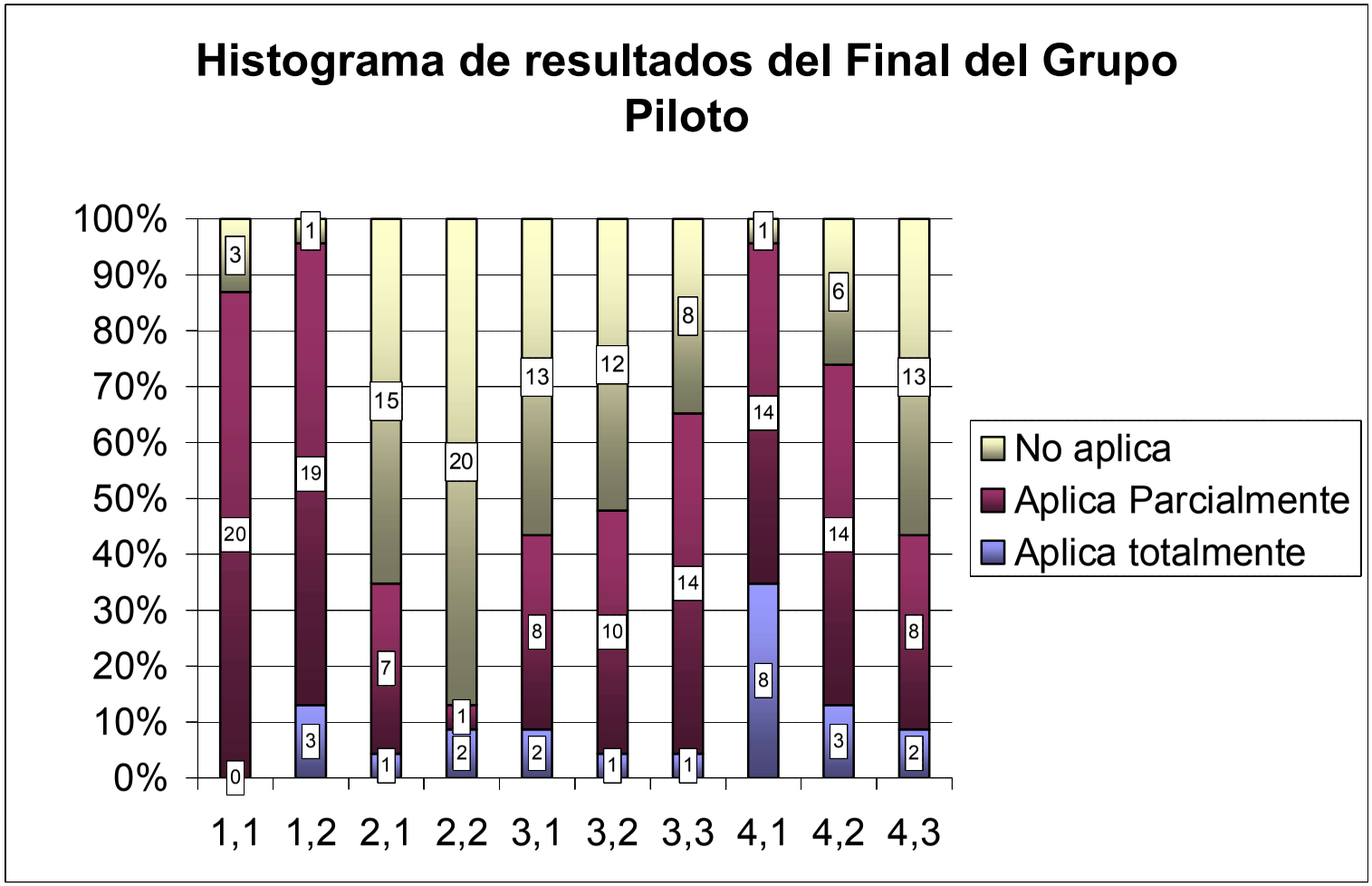
Tabla 3: Resultados separados por estudiante de la prueba diagnostico Final

Punt	ID																								
1	1,1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1
	1,2	2	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	2	1	1	1
2	2,1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0		0	1	1	0	2	0
	2,2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		0	0	0	0	2	0
3	3,1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0		0	1	0	0	2	2
	3,2	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0		0	1	0	0	1	2
	3,3	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0		0	1	1	0	1	2
4	4,1	1	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	2	2	1	1	1	1		1	1	2	2	2	1
	4,2	0	0	1	1	1	0	0	2	0	1	1	2	1	0	1	1	1		1	1	1	1	2	1
	4,3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	2	1	0	0	1	0		0	1	1	1	2	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Tabla 4: Resultad□s grup□ prueba diagn□stic□ Final.

Punto	ID				
1	1,1	0	20	3	1
	1,2	3	19	1	1
2	2,1	1	7	15	1
	2,2	2	1	20	1
3	3,1	2	8	13	1
	3,2	1	10	12	1
	3,3	1	14	8	1
4	4,1	8	14	1	1
	4,2	3	14	6	1
	4,3	2	8	13	1
		Total	**Parcial**	**No aplica**	**No presento**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnostica final.


Histograma de resultados del Final del Grupo Piloto
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1,1
1,2
2,1
2,2
3,1
3,2
3,3
4,1
4,2
4,3
No aplica
Aplica Parcialmente
Aplica totalmente

Prueba Diagnostico Final

Grupo Control:

Las competencias se evaluaron de la siguiente manera.

Tabla 1: Calificación de competencias.

Tipo de evaluación	Valor
Aplica	0
Aplica Parcialmente	1
No aplica	2

Tabla 2: Competencias prueba Final.

Punto	ID	Competencias
1	1,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS dado un modelo es capaz de identifica los elementos que lo relacionan con su grafica
	1,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica procesos lógicos o las razones por que usa estrategia en determinada situación
2	2,1	DEMOSTRATIVA Aplicar procesos lógicos para obtener respuestas
	2,2	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
3	3,1	INTERPRETACIÓN DE MODELOS recurre a dibujos (representaciones icónicas) para representar relaciones y operaciones
	3,2	ARGUMENTATIVA Justifica o explica las razones por las cuales reconoce, usa o crea relaciones y operaciones
	3,3	CONTRASTATIVA: Una vez aplicado un algoritmo, puede revisarlo y confrontarlo con los elementos operados y relacionados
4	4,1	PRAGMÁTICA Y COMUNICATIVA Es capaz de recurrir a diferentes lenguajes de representaciones en la interpretación y solución de problemas, conservando en ellos la estructura lógica y matemática del problema

	4,2	CREATIVA: Aplica, creativamente, un algoritmo para resolver un problema
	4,3	CONTRASTATIVA

Tabla 3: Resultados separados por estudiante 2.

Punt□	ID																										
1	1,1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1
	1,2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1
2	2,1	1	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	2
	2,2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	3,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	3,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	4,1	0	2	2	2	0	0	0	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2	1	2	2	1	0	2
	4,2	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	1
	4,3	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabla 4: Resultad□s grup□ prueba diagn□stic□ 2.

Punt□	ID	Grup□		
1	1,1	2	4	20
	1,2	2	4	20
2	2,1	5	2	19
	2,2	1	4	21
3	3,1	0	0	26
	3,2	0	3	23
	3,3	0	3	23
4	4,1	16	2	8
	4,2	2	9	15
	4,3	2	8	16
		T□tal	**Parcial**	**N□ aplica**

Fig 1: Histograma para resultados grupo prueba diagnóstica 2.